1. Limiti e Colimiti

Sia $\mathbb{C}$ una categoria preadditiva e I una categoria piccola

Definizione 1. Sia F:I$\to\mathbb{C}$ un funtore covariante e sia X$\in\mathbb{C}$. Una famiglia di morfismi f_i:X$\to$F(i) si dice compatibile se per ogni morfismo g:i$\to$j si ha che f_j=F(g)f_i.

Definizione 2. Un **limite proiettivo** di un funtore covariante F:I$\to\mathbb{C}$ e' una coppia ($\varprojlim$(F),(f_i)) dove $\varprojlim$(F) e' un oggetto di $\mathbb{C}$ e f_i:$\varprojlim$(F)$\to$F(i) e' una famiglia compatibile di mofismi in $\mathbb{C}$ tale che per ogni altra famiglia compatibile g_i:$\varprojlim$(F)$\to$F(i) esiste un unico morfismo h:X$\to$Lim(F) tale che f_ih=g_i per ogni i.
Una categoria preadditiva $\mathbb{C}$ si dice completa se per ogni funtore covariante F:I$\to\mathbb{C}$ esite $\varprojlim$(F).

Definizione 3. Un **limite induttivo** o **colimite** di un funtore covariante F:I$\to\mathbb{C}$ e' una coppia ($\varinjlim$(F),(f_i)) dove $\varinjlim$(F) e' un oggetto di $\mathbb{C}$ e f_i:F(i)$\to\varinjlim$(F) e' una famiglia compatibile di mofismi in $\mathbb{C}$, ovvero tale che per ogni λ:i$\to$j il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F(\lambda)"] \arrow[dr, "f_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "f_j"] \\
& \varinjlim(F) &
\end{tikzcd}$$

Inoltre per ogni altra famiglia compatibile g_i:F(i)$\to$X esiste un unico morfismo h:$\varinjlim$(F)$\to$X tale che g_i=hf_i per ogni i.
Una categoria preadditiva $\mathbb{C}$ si dice **cocompleta** se per ogni funtore covariante F:I$\to\mathbb{C}$ esite $\varinjlim$(F).

Proposizione 1. Se esiste il colimite del funtore F:I$\to\mathbb{C}$ questo e' unico a meno di isomorfismo.

Dimostrazione. Siano (X,(f_i)) e (Y,(g_i)) due colimiti di F. Ora (X,(f_i)) e' colimite di F, la famiglia (g_i) e' compatibile quindi esiste un unico morfismo h:X$\to$Y tale che hf_i=g_i. Anche (Y,(g_i)) e' colimite di F, la famiglia (f_i) e' compatibile quindi esiste un unico morfismo q:Y$\to$X tale che qg_i=f_i.
Ora hf_i=(hq)g_i=g_i quindi hq=Id_Y e qg_i=(qh)f_i=f_i quindi qh=Id_X. Allora q=h^{-1} e h:X$\to$Y e' isomorfismo. $\square$

Diamo ora alcuni esempi di colimiti.

(1) Sia I una categoria piccola e discreta e sia F:I$\to\mathbb{C}$ un funtore. Allora $\varinjlim$(F)=$\coprod$F(i). Infatti il coprodotto e' dotato di una famiglia di morfismi

f_i:F(i)→$\coprod$F(i). Sia ora g_i:F(i)→Y una famiglia di morfismi. Allora esiste h:$\coprod$F(i)→Y tale che hf_i=g_i. Quindi un coprodotto e' un caso particolare di colimite.

(2) Sia F:I→$\mathbb{C}$ un funtore con I una categoria piccola e (I,≤) parzialmente ordinato. Siano i,j,k∈I con i≤j≤k abbiamo allora i morfismi u:i→j e v:i→k, consideriamo F(u):F(i)→F(j) e F(v):F(i)→F(k). Supponiamo che esista il pushout P,α_j,α_k di F(u) e F(v). Consideriamo il seguente diagramma di pushout.

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "F(v)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(j) \arrow[d, "\alpha_j"] \\ F(k) \arrow[r, "\alpha_k"'] & P \end{tikzcd}$$

Abbiamo che α_jF(u)=α_kF(v). Sia ora λ:j→k un morfismo, allora v=λu da cui F(v)=F(λ)F(u). Quindi α_kF(v)=α_kF(λ)F(u)=α_jF(u), α_kF(λ)=α_j ovvera la famiglia degli α_i e' compatibile. Siano ora ξ_j:F(j)→X e ξ_k:F(k)→X morfismi tali che ξ_kF(λ)=ξ_j allora ξ_kF(λ)F(u)=ξ_jF(u) da cui ξ_kF(v)=ξ_jF(u). Ora P e' un pushout quindi esiste un unico morfismo ξ:P→X tale che $\xi\alpha_k$=ξ_k e $\xi\alpha_j$=ξ_j. Concludiamo che P=$\varinjlim$(F). Quindi un pushout e' un caso particolare di colimite.

(3) Consideriamo ora

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & O \arrow[d, "0"] \\ D \arrow[r, "g"'] & Q \end{tikzcd}$$

Sia (Q,g)=Coker(f). Il diagramma e' commutativo. Siano h_1:O→Y e h_2:D→Y tali che $h_1 O_O^C$=O_Y^C=h_2f. Necessariamente h_1=O_Y^O. Ora h_2f=O_Y^C implica che esiste un unico v:Q→Y tale che h_2=vg e vO_Q^O=O_Y^O=h_1. Allora i Cokernel sono particolari pushout e quindi particolari colimiti.

Teorema 1. Una categoria preadditiva $\mathbb{C}$ con $O_{\mathbb{C}}$ e' cocompleta se e solo se ha coprodotti e Cokernel.

Dimostrazione. Abbiamo visto che coprodotti e Cokernels sono casi particolari di colimiti.

Viceversa supponiamo che $\mathbb{C}$ abbia coprodotti e Cokernels e sia F:I→$\mathbb{C}$ un funtore, vogliamo costruire $\varinjlim$(F). Dato λ:i→j morfismo in I poniamo i=s(λ) e j=t(λ). Consideriamo ora le famiglie (F(i)) con i∈I e (F(s(λ)) con λ∈Hom(I) e i loro coprodotti ($\coprod$F(i),(f$_i$)), ($\coprod$F(s(λ)),g$_{s(\lambda)}$). Abbiamo F(λ):F(s(λ))$\rightarrow$F(t(λ)), poniamo l$_\lambda$=f$_{s(\lambda)}$-f$_{t(\lambda)}$F(λ), l_λ:F(s(λ))$\rightarrow\coprod$F(i). Per la definizione di coprodotto della famiglia (F(s(λ))) esiste un unico morfismo L:$\coprod$F(s(λ))$\rightarrow\coprod$F(i) tale che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd}
 & F(s(\lambda)) \arrow[dl, "g_{s(\lambda)}"'] \arrow[dr, "l_\lambda"] & \\
\coprod F(s(\lambda)) \arrow[rr, "L"'] & & \coprod_{I\in\mathcal{I}} F(i)
\end{tikzcd}$$

Ovvero l$_\lambda$=Lg$_{s(\lambda)}$. Consideriamo ora F(i)$\xrightarrow{f_i}\coprod$F(i)$\xrightarrow{p}$Coker(L). Proveremo che Coker(L) con i morfismi pf$_i$ e' il colimite di F.
Ora da pL=0 si ha pLg$_{s(\lambda)}$=0, pl$_\lambda$=0 da cui $pf_{s(\lambda)}$-pf$_{t(\lambda)}$F(λ) $= 0$ ovvero pf_i=pf$_j$F(λ). Allora la famiglia (pf$_i$) e' compatibile.
Siano ora h$_i$:F(i)$\rightarrow$Y e h$_j$:F(j)$\rightarrow$Y tali che h$_j$F(λ)=h$_i$. Per definizione di coprodotto esiste un unico α:$\coprod$F(i)$\rightarrow$Y tale che αf$_i$=h$_i$. Proviamo che αL=0, per defizionione di coprodotto della famiglia F(s(λ)), αL=0 $\Leftrightarrow$ αLg$_{s(\lambda)}$=0 per ogni λ $\Leftrightarrow$ αLg$_{s(\lambda)}$=αl$_\lambda$=αf$_{s(\lambda)}$-αf$_{t(\lambda)}$F(λ)=0 $\Leftrightarrow$ h$_{s(\lambda)}$-h$_{t(\lambda)}$F(λ)=h$_i$-h$_j$F(λ)=0. Allora αL=0. Per definizione di Coker(L) esiste un unico morfismo χ:Coker(L)$\rightarrow$Y tale che χp=α. Allora χpf$_i$=αf$_i$=h$_i$. Vediamo che χ e' unico. Supponiamo che esista χ':Coker(L)$\rightarrow$Y tale che χ'pf$_i$=h$_i$ allora χpf$_i$=χ'pf$_i$ e per le proprieta' del coprodotto abbiamo χp=χ'p, p e' un epimorfismo e quindi χ'=χ. Concludiamo che (Coker(L),(pf$_i$))=$\varinjlim$(F). $\square$

Sia I una categoria piccola e $\mathbb{C}$ una categoria cocompleta. Siano F,G:I$\rightarrow\mathbb{C}$ due funtori covarianti e φ:F$\rightarrow$G un morfismo funtoriale. Possiamo considerare i colimiti ($\varinjlim$(F),(f$_i$)) e ($\varinjlim$(G),(g$_i$)). Se λ:i$\rightarrow$j e' un morfismo in I abbiamo la seguente situazione.

$$\begin{tikzcd}
 & F(i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dl, "f_i"] \arrow[dd, "F(\lambda)"] & & G(i) \arrow[dd, "G(\lambda)\circlearrowright"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\
\varinjlim F \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & & & \varinjlim G \\
 & F(j) \arrow[rr, "\varphi_j"'] \arrow[ul, "f_j"'] & & G(j) \arrow[ur, "g_j"] &
\end{tikzcd}$$

Ora g$_j\varphi_j$F(λ)=g$_j$G(λ)$_i$=g$_i\varphi_i$. Allora la famiglia (g$_i\varphi_i$) e' compatibile per F e per definizione di $\varinjlim$(F) esiste un unico morfismo ψ:$\varinjlim$(F)$\rightarrow\varinjlim$(G) tale che ψf$_i$=g$_i\varphi_i$ per ogni i. Poniamo ψ=$\varinjlim$(φ).
Allora $\varinjlim$(φ):$\varinjlim$(F)$\rightarrow\varinjlim$(G) e' l'unico morfismo tale che $\varinjlim$(φ)f$_i$=g$_i\varphi_i$.

Consideriamo la categoria Hom(I,$\mathbb{C}$) dei funtori da I in $\mathbb{C}$. Se $\mathbb{C}$ e' completa possiamo considerare la mappa:

$$\varinjlim\text{:Hom(I,}\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C} \text{ definita da } F\mapsto\varinjlim(F) \text{ e } G\xrightarrow{\varphi}H\mapsto\varinjlim(\varphi)$$

Vadiamo che tale mappa e' un funtore covariante. Siano $\varphi,\psi\in$Hom(I,$\mathbb{C}$), $F\xrightarrow{\varphi}G\xrightarrow{\psi}H$ e $F\xrightarrow{\psi\varphi}H$. Abbiamo i colimiti $(\varinjlim(F),(f_i))$, $(\varinjlim(G),(g_i))$ e $(\varinjlim(H),(h_i))$. Ora $\varinjlim(\psi\varphi)$ e' l'unico morfismo tale che $\varinjlim(\psi\varphi)f_i=h_i(\psi\varphi)_i$, $\varinjlim(\psi)$ e' l'unico morfismo tale che $\varinjlim(\psi)g_i=h_i\psi_i$ e $\varinjlim(\varphi)$ e' l'unico morfismo tale che $\varinjlim(\varphi)f_i=g_i\varphi_i$.
Allora $\varinjlim(\psi)\varinjlim(\varphi)f_i=\varinjlim(\psi)g_i\varphi_i=h_i\psi_i\varphi_i=h_i(\psi\varphi)_i$. Per l'unicita' concludiamo che $\varinjlim(\psi\varphi)=\varinjlim(\psi)\varinjlim(\varphi)$.

Teorema 2. Il funtore $\varinjlim$ e' esatto a destra.

Dimostrazione. Siano F,G,H:I$\to\mathbb{C}$ funtori e siano $F\xrightarrow{\varphi}G\xrightarrow{\psi}H$ morfismi funtoriali tali che la successione $F(i)\xrightarrow{\varphi_i}G(i)\xrightarrow{\psi_i}H(i)\to O_C$ e' esatta per ogni i. Consideriamo $(\varinjlim(F),(f_i))$, $(\varinjlim(G),(g_i))$ e $(\varinjlim(H),(h_i))$, vogliamo provare che la successione

$$\varinjlim(F)\xrightarrow{\varinjlim\varphi}\varinjlim(G)\xrightarrow{\varinjlim\psi}\varinjlim(H)$$

e' esatta a destra.
Proviamo che $\varinjlim(\psi)$ e' un epimorfismo. Sia $v:\varinjlim(H)\to X$ tale che $v\varinjlim(\psi)=0$, allora $v\varinjlim(\psi)g_i=0$ per ogni i da cui $vh_i\psi_i=0$ per ogni i. Ora ψ_i epimorfismo implica $vh_i=0$ per ogni i ma anche $0h_i=0$ e per la definizione di colimite concludo che v=0.
Proviamo ora che $\mathrm{Im}(\varinjlim(\varphi))=\mathrm{Ker}(\varinjlim(\psi))$. In tal caso $\mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(\varinjlim(\varphi))=\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(\varinjlim(\psi)))=\varinjlim(\psi)$ essendo $\varinjlim(\psi)$ un epimorfismo. Inoltre $\mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(\varinjlim(\varphi))=\mathrm{Coker}(\varinjlim(\varphi))$. Basta dunque verificare che $\mathrm{Coker}(\varinjlim(\varphi))=\varinjlim(\psi)$. Consideriamo la seguente situazione.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F \arrow[r, "\varinjlim\varphi"] & \varinjlim G \arrow[rr, "\varinjlim\psi"] \arrow[dr, dashed, "\xi"'] & & \varinjlim H \arrow[dl, "\bar{\xi}"'] \\
& & X & \\
F(i) \arrow[uu, "f_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & G(i) \arrow[uu, "g_i"] \arrow[rr, "\psi_i"'] & & H(i) \arrow[uu, "h_i"'] \arrow[ul, dashed, "\xi_i"]
\end{tikzcd}$$

Ora $\varinjlim(\psi)\,\varinjlim(\varphi)f_i=\varinjlim(\psi\varphi)f_i=h_i(\psi\varphi)_i=h_i\psi_i\varphi_i=0$ per ogni i. Per definizione di $\varinjlim(H)$ abbiamo che $\varinjlim(\psi)\,\varinjlim(\varphi)=0$.
Sia ora $\xi:\varinjlim(G)\to X$ tale che $\xi\varinjlim(\varphi)=0$ allora $\xi\varinjlim(\varphi)f_i=0$ per ogni i da cui $\xi g_i\varphi_i=0$ per ogni i. Ora $\mathrm{Im}(\varphi_i)=\mathrm{Ker}(\psi_i)$ implica $\mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(\varphi_i))=\psi_i$ da cui $\mathrm{Coker}(\varphi_i)=\psi_i$ per ogni i. Allora $\xi g_i\varphi_i=0$ implica che per ogni i esiste $\xi_i:H(i)\to X$ tale che $\xi_i\psi_i=\xi g_i$.
Consideriamo $(X,(\xi_i))$. Sia λ:i$\to$j un morfismo. Essendo ψ un morfismo funtoriale

abbiamo che $H(\lambda)\psi_i=\psi_j G(\lambda)$. Consideriamo $\xi_j H(\lambda)\psi_j=\xi_j\psi_j G(\lambda)=\xi g_j G(\lambda)=\xi g_i=\xi_i\psi_i$. Allora $\xi_j H(\lambda)\psi_i=\xi_i\psi_i$ e ψ_i epimorfismo implica $\xi_j H(\lambda)=\xi_i$. Quindi la famiglia (ξ_i) e' compatibile per $\varinjlim(H)$ pertanto esiste un unico morfismo $\bar{\xi}:\varinjlim(H)\to X$ tale che $\bar{\xi}h_i=\xi_i$ per ogni i. Ora $\bar{\xi}\varinjlim(\psi)g_i=\bar{\xi}h_i\psi_i=\xi g_i$ per ogni i e per la definizione di colimite ho che $\bar{\xi}\varinjlim(\psi)=\xi$. Supponiamo che esista $\chi:\varinjlim(H)\to X$ tale che $\chi\varinjlim(\psi)=\xi$ allora $\bar{\xi}\varinjlim(\psi)=\chi\varinjlim(\psi)$ e $\varinjlim(\psi)$ epimorfismo implica che $\bar{\xi}=\chi$. Pertanto $\bar{\xi}$ e' unico. □

Sia ora $(I,\leq)$ un insieme parzialmente ordinato, I si dice diretto se per ogni $i,j\in I$ con $i\leq j$ si ha che esiste $k\in I$ tale che $i\leq k$ e $k\leq j$. Consideriamo I come categoria piccola definendo $\mathrm{Hom}(i,j)=\{f^i_j:j\to j\}$ se $i\leq j$ e $\mathrm{Hom}(i,j)$ come il vuoto altrimenti.

Definizione 4. Sia $\mathbb{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** di elementi di $\mathbb{C}$ sull'insieme diretto I consiste di:

- un elemento $C_i\in\mathbb{C}$ per ogni $i\in I$,
- un morfismo $f^i_j:i\to j$ per ogni $i\leq j$ tale che $f^i_i=\mathrm{Id}_{C_i}$ e se $i\leq j\leq k$ allora $f^i_k=f^j_k f^i_j$.

In altri termini dare un sistema diretto di elementi di $\mathbb{C}$ sull'insieme diretto I e' equivalente a dare un funtore covariante $F:I\to\mathbb{C}$. Il limite in $\mathbb{C}$ di un sistema diretto $F:I\to\mathbb{C}$ si dice un **limite diretto** in $\mathbb{C}$.
In modo analogo si definisce un sistema inverso in $\mathbb{C}$ su I come un funtore $F:I^{op}\to\mathbb{C}$. Il limite di un sistema inverso si dice un limite inverso.
Consideriamo ad esempio nella categoria $\mathbb{C}$=A-Mod un sistema diretto $(X_i,(f^i_j))$ con $f^i_j:X_i\to X_j$ morfismo di A-moduli. In questa situazione vogliamo dare una costruzione alternativa del colimite in A-Mod della famiglia (X_i).
Nella categoria Ins consideriamo il coprodotto della famiglia (X_i) detto anche unione disgiunta degli (X_i) e indicato con $\dot{\bigcup}X_i$.
Per definizione $\dot{\bigcup}X_i=\{(x,i)\in(\bigcup X_i)\times I \text{ t.c. } x\in X_i\}=\bigcup(X_i\times\{i\})$ e consideriamo le mappe

$$\varepsilon_j:X_j\to\dot{\bigcup}X_i,\ x_j\mapsto(x_j,j),$$

con tali applicazioni $\dot{\bigcup}X_i$ e' il coprodotto della famiglia (X_i). Supponiamo di avere un'altra famiglia di morfismi $\xi_j:X_j\to Y$. Consideriamo il morfismo $\xi:\dot{\bigcup}X_i\to Y$ definito da $\xi(x_j,j)=\xi_j(x_j)$, allora $\xi\varepsilon_j=\xi_j$ per ogni j. Sia $\eta:\dot{\bigcup}X_i\to Y$ un altro morfismo tale che $\eta\varepsilon_j=\xi\varepsilon_j$ per ogni j, allora $\eta\varepsilon_j(x_j)=\xi\varepsilon_j(x_j)$ per ogni $x_j\in X_j$ da cui $\eta(x_j,j)=\xi(x_j,j)$ per ogni j ovvero $\eta=\xi$.
Introduciamo ora su $\dot{\bigcup}X_i$ una relazione binaria, per brevita' indicheremo (x_i,i) con x_i. Dati $x_i\in X_i$ e $x_j\in X_j$ diremo che

$$x_i\Re x_j \Leftrightarrow \text{esiste k con } i\leq k,\ j\leq k \text{ t.c. } f^i_k(x_i)=f^j_k(x_j).$$

Proviamo che $\Re$ e' una relazione d'equivalenza.

- $x_i \Re x_i$ infatti $x_i = f_i^i(x_i)$.
- Se $x_i \Re x_j$ allora esiste k con $i \leq k$, $j \leq k$ t.c. $f_k^i(x_i) = f_k^j(x_j)$ e da $f_k^j(x_j) = f_k^i(x_i)$ abbiamo che $x_j \Re x_i$.
- Siano $x_i \Re x_j$ e $x_j \Re x_t$. Allora esiste k con $k \leq i$ e $k \leq j$ t.c. $f_k^i(x_i) = f_k^j(x_j)$ ed esiste h con $h \leq j$ e $h \leq t$ t.c. $f_h^j(x_j) = f_h^t(x_t)$. Ora I e' diretto e pertanto esiste l con con $k \leq l$ e $h \leq l$ allora anche $i \leq l$ e $t \leq l$. Abbiamo $f_l^i(x_i) = f_l^k f_k^i(x_i) = f_l^k f_k^j(x_j) =$ $= f_l^j(x_j) = f_l^h f_h^j(x_j) = f_l^h f_h^t(x_t) = f_l^t(x_t)$, allora $x_i \Re x_t$.

Sia ora $X = \dot{\bigcup} X_i$ e consideriamo il quoziente $X/\Re$. La classe di x_i modulo la relazione $\Re$ verra' indicata con $\widehat{x_i}$ e detta **germe** di x_i. Per quanto detto

$$\widehat{x_i} = \widehat{y_j} \Leftrightarrow \text{ esiste k con } i \leq k,\ j \leq k \text{ t.c. } f_k^i(x_i) = f_k^j(y_j).$$

Vogliamo ora dare a $X/\Re$ una struttura di A-modulo. Siano $\widehat{x_i}, \widehat{y_j} \in X/\Re$ e siano x_i e y_j due loro rappresentanti. Allora $f_k^i(x_i), f_k^j(y_j) \in X_k$ e possiamo considerare $f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j) \in X_k$ e il germe $\widehat{f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)} \in X/\Re$. Definiamo allora

$$\widehat{x_i} + \widehat{y_j} = \widehat{f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)}.$$

Proviamo che quella data e' una buona definizione. Siano $i \leq k$, $j \leq k$, $i \leq k'$ e $j \leq k'$. Proveremo che $\widehat{f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)} = \widehat{f_{k'}^i(x_i) + f_{k'}^j(y_j)}$. Sia h tale che $k \leq h$ e $k' \leq h$ allora $f_k^k f_h^k(f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)) = f_h^k(f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)) = f_h^i(x_i) + f_h^j(y_j))$.
Analogamente $f_{k'}^{k'} f_h^{k'}(f_{k'}^i(x_i) + f_{k'}^j(y_j)) = f_h^{k'}(f_{k'}^i(x_i) + f_{k'}^j(y_j)) = f_h^i(x_i) + f_h^j(y_j))$. Pertanto $\widehat{f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)} = \widehat{f_{k'}^i(x_i) + f_{k'}^j(y_j)}$.
Siano ora $\widehat{x_i} = \widehat{x_u}$ e $\widehat{y_j} = \widehat{y_v}$. Siano k,t tali che $i \leq k$, $j \leq k$, $u \leq t$ e $v \leq t$. Sappiamo che esistono s,r tali che $f_s^i(x_i) = f_s^u(x_u)$ e $f_r^j(y_j) = f_r^v(y_v)$ con $s \leq l$ e $r \leq l$. Per tale l si ha $f_l^i(x_i) = f_l^u(x_u)$ e $f_l^j(y_j) = f_l^v(y_v)$. Quindi $\widehat{f_k^i(x_i) + f_k^j(y_j)} = \widehat{f_l^i(x_i) + f_l^j(y_j)} = \widehat{f_l^u(x_u) + f_l^v(y_v)} = \widehat{f_t^u(x_u) + f_t^v(y_v)}$.
Ovvero $\widehat{x_i} + \widehat{y_j} = \widehat{x_u} + \widehat{y_v}$.
Abbiamo anche mostrato che $\widehat{x_i} = \widehat{f_k^i(x_i)}$ per ogni $i \leq k$.

- Proviamo che + e' associativa. Considero $(\widehat{x_i} + \widehat{y_j}) + \widehat{z_s} = (f_l^i(x_i) + \widehat{f_l^j(y_j)}) + f_l^s(z_s) =$ $= f_l^i(x_i) + (\widehat{f_l^j(y_j)} + f_l^s(z_s)) = \widehat{x_i} + (\widehat{y_j} + \widehat{z_s})$.
- Prendiamo per un j qualsiasi $\widehat{O_j}$ allora $\widehat{x_i} + \widehat{O_j} = \widehat{f_l^i(x_i)} + \widehat{f_l^j(O_j)} = \widehat{f_l^i(x_i)} = \widehat{x_i}$. Abbiamo cosi' un elemento neutro.
- Ora $\widehat{x_i} + \widehat{y_j} = (\widehat{f_l^i(x_i) + f_l^j}(y_j) = (\widehat{f_l^j(y_j) + f_l^i}(x_i) = \widehat{y_j} + \widehat{x_i}$. Quindi + e' commutativa.
- $\widehat{x_i} + \widehat{-x_i} = (\widehat{f_l^i(x_i) + f_l^i}(-x_i) = (\widehat{f_l^i(x_i) - f_l^i}(x_j) = \widehat{0} = 0$, quindi ogni elemento ha opposto e $-\widehat{x_i} = \widehat{-x_i}$.
- Definiamo ora la moltiplicazione scalare come $r\widehat{x_i} = \widehat{rx_i}$. Notiamo che $\widehat{x_i} = \widehat{y_j}$ implica che esiste k con $i \leq k$ e $j \leq k$ tale che $f_k^i(x_i) = f_k^j(y_j)$ da cui $r f_k^i(x_i) = r f_k^j(y_j)$ e $f_k^i(rx_i) = f_k^j(ry_j)$ ovvero $\widehat{rx_i} = \widehat{ry_j}$. Quindi quella data e' una buona definizione.

Il quoziente $X/\Re$ diventa cosi' un A-modulo. Abbiamo inoltre dei morfismi naturali di A-moduli sul quoziente

$$\varepsilon_i{:}\mathrm{X}_i \rightarrow \mathrm{X}/\Re,\ \mathrm{x}_i \mapsto \widehat{x_i}.$$

La famiglia ε_i e' compatibile, infatti preso un morfismo $\mathrm{f}^i_j{:}\mathrm{X}_i \rightarrow \mathrm{X}_j$ si ha $\varepsilon_j(\mathrm{f}^i_j(\mathrm{x}_i)) = \widehat{f^i_j(x_i)} = \widehat{x_i} = \varepsilon_i(\mathrm{x}_i)$. Supponiamo ora di avere un'altra famiglia compatibile $\xi_i{:}\mathrm{X}_i \rightarrow \mathrm{Y}$ ovvero tale che $\xi_j \mathrm{f}^i_j = \xi_i$. Consideriamo la mappa $\xi{:}\mathrm{X}/\Re \rightarrow \mathrm{Y}$ definita da $\xi(\widehat{x_i}) = \xi_i(\mathrm{x}_i)$. Siano $\widehat{x_i} = \widehat{y_j}$ allora esiste k tale che $\mathrm{f}^i_k(\mathrm{x}_i) = \mathrm{f}^j_k(\mathrm{y}_j)$ e ho $\xi_j(\mathrm{y}_j) = \xi_k(\mathrm{f}^j_k(\mathrm{y}_j)) = \xi_k(\mathrm{f}^i_k(\mathrm{x}_i)) = \xi_i(\mathrm{x}_i)$. Quindi ξ e' ben definito.Proviamo che ξ e' un morfismo.

- $\xi(\widehat{x_i} + \widehat{y_j}) = \xi(\widehat{x_i + y_i}) = \xi_i(\mathrm{x}_i + \mathrm{y}_i) = \xi_i(\mathrm{x}_i) + \xi_i(\mathrm{y}_i) = \xi(\widehat{x_i}) + \xi(\widehat{x_i})$, infatti per quanto visto non e' restrittivo prendere j=i.
- $\xi(\mathrm{r}\widehat{x_i}) = \xi(\widehat{rx_i}) = \xi_i(\mathrm{rx}_i) = \mathrm{r}\xi_i(\mathrm{x}_i) = \mathrm{r}\xi(\widehat{x_i})$.

Vediamo che ξ rende commutativi i diagrammi, infatti se $\mathrm{x}_i \in \mathrm{X}_i$ abbiamo che $(\xi\varepsilon_i)(\mathrm{x}_i) = \xi(\widehat{x_i}) = \xi_i(\mathrm{x}_i)$.
Vediamo infine che ξ e' unico rispetto a tale proprieta'. Sia ξ' tale che $\xi'\varepsilon_i = \xi_i$ allora $\xi'(\widehat{x_i}) = \xi'\varepsilon_i(\mathrm{x}_i) = \xi_i(\mathrm{x}_i) = \xi\varepsilon_i(\mathrm{x}_i) = \xi(\widehat{x_i})$.
Riassumento abbiamo costruito una coppia $(\mathrm{X}/\Re, (\varepsilon_i))$ che abbiamo dimostrato essere il colimite della famiglia (X_i) ovvero $\varinjlim \mathrm{X}_i = \mathrm{X}/\Re$.

2. Fasci

Definizione 5. Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** $\Im$ di gruppi abeliani su X consiste nel dare per ogni aperto U$\subseteq$X un gruppo abeliamo $\Im$(U) e per ogni inclusione V$\subseteq$U di aperti di X un morfismo di gruppi abeliani f_V^U:$\Im$(U)$\to\Im$(V), tali che:

(1) il gruppo associato all'insieme vuoto e' il gruppo banale $\{0\}$,
(2) f_U^U e' la mappa identica su U,
(3) se W$\subseteq$V$\subseteq$U allora $f_V^U = f_W^V \circ f_V^U$.

Traduciamo ora la definizione di prefascio nel linguaggio delle categorie. Sia Top(X) la categoria i cui oggetti sono gli aperti di X e in cui gli unici morfismi sono le mappe di inclusione, ovvero Hom(V,U) e' vuoto se V non e' contenuto in U e Hom(V,U) consta di un solo elemento se V$\subseteq$U. Allora un prefascio e' un funtore controvariante dalla categoria Top(X) nella categoria Ab dei gruppi abeliani.
Piu' in generale un prefascio su una generica categoria $\mathbb{C}$ e' un funtore controvariante da Top(X) in $\mathbb{C}$.

Se $\Im$ e' un prefascio su X chiameremo $\Im$(U) la **sezione** di $\Im$ sull'aperto U che talvolta indicheremo con Γ(U,$\Im$). Le mappe f_V^U verranno chiamate **mappe di restrizione** e noteremo f_V^U(s)=s_V se s$\in\Im$(U).

Definizione 6. Sia X uno spazio topologico. Un prefascio $\Im$ di gruppi abeliani su X si dice un **fascio** su X se soddisfa alle seguenti condizioni

(1) se U e' un aperto di X e $\{V_i\}$ e' un ricoprimento aperto di U e se s$\in\Im$(U) e' tale che s_{Vi}=0 per ogni i allora s=0,
(2) se U e' un aperto di X e $\{V_i\}$ e' un ricoprimento aperto di U e per ogni i esiste $s_i\in\Im(V_i)$ tale che s_i=s_j su $V_i \cap V_j$ allora esiste s$\in\Im$(U) tale che s_{V_i}=s_i per ogni i.

Notiamo che l'elemento s$\in\Im$(U) tale che s_{Vi}=s_i e' unico. Infatti se esistesse t$\in\Im$(U) tale che t_{Vi}=s_i avremmo che s_{Vi}-t_{Vi}=$(s\text{-}t)_{Vi}$=0 per ogni i e per 1) si avrebbe s-t=0 ovvero t=s.

Diamo ora un esempio di fascio. Consideriamo una varieta' algebrica X sul campo K, per ogni aperto U$\subseteq$X sia $\mathbb{O}$(U) l'anello delle funzioni regolari g:U$\to$K. Se V$\subseteq$U e' un aperto e g$\in\mathbb{O}$(U) la restrizione di g_V di g a V e' una funzione regolare su V, ovvero $g_V\in\mathbb{O}$(V). Definiamo allora le mappe di restrizione come f_V^U(g)=g_V per ogni g$\in\mathbb{O}$(U). Abbiamo cosi' definito su X un prefascio $\mathbb{O}$. Verifichiamo che $\mathbb{O}$ e' un fascio.

Sia U un aperto di X e sia $\{V_i\}$ un ricoprimento aperto di U.
1) Sia $g \in \mathbb{O}(U)$ tale che $g_{V\,i}=0$ per ogni i. Una funzione localmente nulla e' identicamente nulla pertanto g=0.
2) Siano $g_i \in \mathbb{O}(V_i)$ tali che $g_i=g_j$ su $V_i \cap V_j$ per ogni i,j. Allora per ogni i,j le funzioni regolari g_i e g_j coincidono su un aperto, per la definizione di funzione regolare esiste una funzione $G \in \mathbb{O}(U)$ che coincide con g_i su V_i per ogni i.
Il fascio $\mathbb{O}$ cosi' definito si dice **fascio delle funzioni regolari sulla varieta' X**.

Diamo un esempio di un prefascio che non e' un fascio. Consideriamo il prefascio $L(\mathbb{R})$ delle funzioni limitate su $\mathbb{R}$. Prendiamo come aperto di $\mathbb{R}$ l'intervallo U=(0,1), allora posto $V_n=(\frac{1}{n},1)$ si ha che $\{V_n\}$ al variare di n tra i naturali positivi e' un ricoprimento aperto di U. Per ogni V_n consideriamo la funzione $s_n=\frac{1}{x}$, ovviamente per ogni i,j si ha $s_i=\frac{1}{x}=s_j$ su $V_i \cap V_j$. Ora $\mathrm{Sup}_{V_n} s_n=n$ per ogni n, quindi le s_n sono limitate. Sia ora s definita su (0,1) tale che $s_{V_n}=s_n$ per ogni n allora $s(x)=\frac{1}{x}$, ma s non e' limitata su (0,1) infatti $\lim_{x \mapsto 0} s(x)=\infty$. Pertanto non esiste nessuna funzione limitata su (0,1) che coincida con s_n su V_n per ogni n e quindi $L(\mathbb{R})$ non e' un fascio.

Consideriamo un prefascio $\Im$ e un punto $x \in X$, per ogni $U \subseteq X$ aperto tale che $x \in U$ consideriamo $\Im(U)$. Nel linguaggio delle categorie abbiamo un funtore $F:Top(X) \rightarrow Ab$, per come e' definita Top(X) e' una categoria piccola e per la definizione di prefascio F e' un sistema diretto in Ab. La categoria Ab e' abeliana, in particolare esistono i limiti diretti, ha quindi senso cosiderare il limite diretto dei gruppi $\Im(U)$ in Ab al variare di U tra gli aperti di X contenenti x.

Definizione 7. La **spiga** del fascio $\Im$ sul punto $x \in X$ e' definita come il limite diretto in Ab dei gruppi $\Im(U)$, ovvero $\Im_x=\varinjlim(\Im(U))$.

Ricordando la costruzione alternativa del colimite abbiamo che $\Im_x=X/\Re$ dove $X=\dot{\bigcup}\Im(U)$ al variare di U tra gli aperti contenenti x. Inoltre due elementi $s_x,t_x \in \Im_x$ rappresentati da $s \in \Im(U)$ e $t \in \Im(V)$ coincidono se e solo se esiste W aperto di X contenuto sia in U sia in V tale che $f^U_W(s)=f^V_W(t)$. Un elemento di $\Im_x$ e' quindi rappresentato da una coppia $<U,s>$ dove U e' un aperto di X contenente x e $s \in \Im(U)$. Due di tali coppie $<U,s>$ e $<V,t>$ rappresentano lo stesso elemento di $\Im_x$ se e solo se esiste un aperto $W \subseteq U \cap V$ tale che $s_W=t_W$. Gli elementi di $\Im_x$ riguardati come classi vengono detti germi della sezione di $\Im$ sul punto x.
Ad esempio nel caso del fascio $\mathbb{O}$ delle funzioni regolari sulla varieta' X, la spiga $\mathbb{O}_x$ di $\mathbb{O}$ sul punto x e' l'anello locale di x su X.

Definizione 8. Siano ora $\Im$ e $\aleph$ due prefasci sullo spazio topologico X. Un **morfismo di prefasci** φ:$\Im\rightarrow\aleph$ consiste di un morfismo di gruppi φ(U):$\Im$(U)$\rightarrow\aleph$(U) per ogni U$\subseteq$X aperto tale che per ogni inclusione V$\subseteq$U si ha che $g_V^U\varphi(U)=\varphi(V)g_V^U$. Ovvero per ogni V$\subseteq$U il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd}
\Im(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "f_V^U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \aleph(U) \arrow[d, "g_V^U"] \\
\Im(V) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \aleph(V)
\end{tikzcd}$$

Se $\Im$ e $\aleph$ sono fasci si da' la stessa defizione di morfismo. Infine un morfismo di prefasci di dice un isomorfismo se ammette un'inversa bilatera.

Ad esempio la mappa $\varphi:\mathbb{O}(\mathbb{C})\rightarrow\mathbb{O}^+(\mathbb{C})$ definita da $\varphi(f)=e^f$ e' un morfismo di fasci tra il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ e il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ che non si annullano.

Consideriamo un morfismo di prefasci φ:$\Im\rightarrow\aleph$, sia p$\in$X e siano $\Im_p$ e $\aleph_p$ le spighe di $\Im$ e $\aleph$ su p. Sia U un aperto contenente p, abbiamo il morfismo φ(U):$\Im$(U)$\rightarrow\aleph$(U), se s$\in\Im$(U) e' una sezione di $\Im$ su U noteremo per brevita' φ(U)(s) con φ(s). Sia $s_p\in\Im_p$ un germe e sia s$\in\Im$(U) un suo rappresentante. Consideriamo φ(s)$\in\aleph$(U) e sia $\varphi(s)_p\in\aleph_p$ il germe associato. Allora la mappa

$$\varphi_p:\Im_p\rightarrow\aleph_p \text{ definita da } s_p\mapsto\varphi(s)_p.$$

e' un morfismo di gruppi, infatti:

$$\varphi_p(s_p+t_p)=\varphi_p((s+t)_p)=\varphi(s+t)_p=\varphi(s)_p+\varphi(t)_p=\varphi_p(s_p)+\varphi_p(t_p).$$

Abbiamo cosi' visto che un morfismo di fasci φ:$\Im\rightarrow\aleph$ induce un morfismo di gruppi $\varphi_p:\Im_p\rightarrow\aleph_p$ per ogni p$\in$X.
Nel linguaggio delle categorie possiamo considerare i due fasci $\Im$ e $\aleph$ come due funtori F,G:Top(X)$\rightarrow$Ab. Il morfismo tra fasci si traduce in un morfismo funtoriale. Consideriamo le spighe su p, $\Im_p=\varinjlim(F)$ e $\aleph_p=\varinjlim(G)$. Dato il morfismo funtoriale φ:F$\rightarrow$G sappiamo che esiste un unico morfismo $\varinjlim(\varphi):\varinjlim(F)\rightarrow\varinjlim(G)$ tale che $\varinjlim(\varphi)f_p^U=g_p^U\varphi(U)$ per ogni U contenente p, dove f_p^U e g_p^U sono le mappe di restrizione. Reinterpretiamo $\varinjlim(\varphi)$ come morfismo tra le spighe $\Im_p$ e $\aleph_p$. Abbiamo

allora che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd} \Im_p \arrow[r, "\underrightarrow{\lim}(\varphi)"] & \aleph(p) \\ \Im(U) \arrow[u, "f_p^U"] \arrow[r, "\varphi(U)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \aleph(U) \arrow[u, "g_p^U"'] \end{tikzcd}$$

Sia s$\in\Im$(U) una sezione di $\Im$ su U allora f$_p^U$(s)=s$_p$ germe di s in p, d'altra parte φ(U)(s):=φ(s) e g$_p^U$(φ(s))=(φ(s))$_p$. Per la commutativita' del diagramma concludiamo che ($\underrightarrow{\lim}(\varphi)$)(s$_p$)=$(\varphi(s))_p$.

Definizione 9. Un **sottofascio** di un fascio $\Im$ e' un fascio $\Im$' tale che per ogni aperto U$\subseteq$X, $\Im$'(U) e' un sottogruppo di $\Im$(U) e in cui le mappe di restrizione sono quelle indotte dalle mappe di restrizione di $\Im$. Piu' precisamente se abbiamo V$\subseteq$U possiamo considerare f$_V^U$:$\Im$(U)$\rightarrow\Im$(V) e abbiamo le mappe f$_V^U$':$\Im$'(U)$\rightarrow\Im$'(V) definite da f$_V^U$'(x)=f$_V^U$(x) per ogni x$\in\Im$'(U).

Sappiamo che $\Im_p$=$\underrightarrow{\lim}\Im$(U) e $\Im$'$_p$=$\underrightarrow{\lim}\Im$'(U) poiche' ogni $\Im$'(U) e' sottogruppo di $\Im$(U) abbiamo che $\Im$'$_p$ e' sottogruppo di $\Im_p$.
Sia ora φ:$\Im\rightarrow\aleph$ un morfismo di fasci.

- Per ogni U aperto di X abbiamo un morfismo di gruppi φ(U):$\Im$(U)$\rightarrow\aleph$(U), possiamo considerere allora per ogni U il sottogruppo Ker(φ(U)) di $\Im$(U). Abbiamo inoltre delle mappe di restrizione indotte. Condideriamo infatti per ogni inclusione V$\subseteq$U la mappa k$_V^U$:Ker(φ(U))$\rightarrow$Ker(φ(V)) definita da k$_V^U$(x)=f$_V^U$(x) per ogni x$\in$Ker(φ(U)). Le mappe k$_V^U$ sono ben definite infatti se x$\in$Ker(φ(U)) allora φ(V)(k$_V^U$(x))=φ(V)(f$_V^U$(x))=g$_V^U\varphi$(U)(x)=0, quindi k$_V^U$(x)$\in$Ker(φ(V)). Allora **Ker(φ) e' un sottofascio di** $\Im$.
- Per ogni U aperto di X consideriamo Im(φ(U)) sottogruppo di $\Im$(U). Consideriamo le mappe I$_V^U$:Im(φ(U))$\rightarrow$Im(φ(V)) definite da I$_V^U$(x)=g$_V^U$(x). Le mappe sono ben definite infatti sia x$\in$Im(φ(U)) allora esiste y$\in\Im$(U) tale che φ(U)(y)=x, allora g$_V^U$(x)=g$_V^U$(φ(U)(y))=φ(V)f$_V^U$(y), quindi I$_V^U$(x)$\in$Im(φ(V)). Abbiamo cosi' definito un **prefascio Im(φ)** assiciato al morfismo φ.
- Ad ogni U aperto di X associamo il gruppo Coker(φ(U)). Consideriamo le mappe di restrizione
C$_V^U$:Coker(φ(U)):$\rightarrow$Coker(φ(V)) definite da C$_V^U$(x+Im(φ(U)))=g$_V^U$(x)+Im(φ(V)). Tali mappe sono ben definite infatti sia x+Im(φ(U))=y+Im(φ(U)) allora x-y$\in$Im(φ(U)) e per quanto visto nel punto precedente g$_V^U$(x-y)=g$_V^U$(x)-g$_V^U$(y)$\in$Im(φ(V)) dunque g$_V^U$(x)+Im(φ(V))=g$_V^U$(y)+Im(φ(V)) ovvero C$_V^U$($\overline{x}$)=C$_V^U$($\overline{y}$). Abbiamo cosý definito un **prefascio Coker(φ)** associato al morfismo φ.

Diremo che una sequenza di fasci

$$...\to\Im^{n-1}\xrightarrow{\varphi^{n-1}}\Im^{n}\xrightarrow{\varphi^{n}}\Im^{n+1}\to...$$

e' esatta se ad ogni passo $\ker(\varphi^n)=\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})$.
Sia ora $\Im$' un sottofascio di un fascio . Per ogni U aperto di X abbiamo che $\Im$'(U) e' sottogruppo di $\Im$(U), possiamo associare ad U il gruppo quoziente $\Im$(U)/$\Im$'(U). Attraverso le mappe di restrizione Q_V^U:$\Im$(U)/$\Im$'(U)$\to\Im$(V)/$\Im$'(V) definite da Q_V^U(x+$\Im$'(U))=f_V^U(x)+$\Im$'(V) costruiamo un fascio $\Im$/$\Im$' detto **fascio quoziente**. Inoltre per ogni p$\in$X abbiamo che $(\Im/\Im')_p=\varinjlim(\Im(U)/\Im'(U))=\varinjlim\Im(U)/\varinjlim\Im'(U)=\Im_p/\Im'_p$.
Consideriamo ad esempio $\Im$' sottofascio di $\Im$, per ogni p$\in$X abbiamo la mappa di proiezione Π_p:$\Im_p\to\Im_p/\Im_p$' suriettiva e tale che $\ker(\Pi_p)=\Im_p$'. Tali proiezioni inducono un morfismo suriettivo di fasci Π:$\Im\to\Im/\Im$' tale che Ker(Π)=$\Im$'. Possiamo considerare l'inclusione i:$\Im'\to\Im$. Quindi la seguente successione di fasci e' sempre esatta.

$$0\to\Im'\xrightarrow{i}\Im\xrightarrow{\Pi}\Im/\Im'\to 0$$

Proposizione 2. Sia φ:$\Im\to\aleph$ un morfismo di fasci. Allora il prefascio Ker(φ) e' un fascio.

Dimostrazione. Sia U un aperto di X e sia V_i un ricoprimento aperto di U.
Sia s$\in$Ker(φ)(U) tale che $k_{V_i}^U$(s)=0 per ogni i, per definizione delle mappe di restrizione su Ker(φ) abbiamo che $f_{V_i}^U$(s)=0 per ogni i. Se riguardiamo s come elemento di $\Im$(U) essendo $\Im$ un fascio abbiamo che s=0.
Se per ogni i esiste $s_i\in\mathrm{Ker}(\varphi(V_i))\subseteq\Im(V_i)$ tale che $k_{V_i\cap V_j}^U(s_i)=k_{V_i\cap V_j}^U(s_j)$ allora $f_{V_i\cap V_j}^U(s_i)=f_{V_i\cap V_j}^U(s_j)$ implica che esiste s$\in\Im$(U) tale che $f_{V_i}^U(s)=s_i$ per ogni i. Proviamo che s$\in$Ker(φ(U)). Abbiamo che $g_{V_i}^U\varphi(U)(s)=\varphi(V_i)f_{V_i}^U(s)=\varphi(V_i)(s_i)=0$ per ogni i, in quanto φ e' un morfismo di fasci. Ora $g_{V_i}^U\varphi(U)(s)=0$ per ogni i implica $\varphi(U)(s)=0$ essendo $\aleph$ un fascio, quindi s$\in$Ker(φ(U)). Abbiamo cosi' trovato un s$\in$Ker(φ(U)) tale che $k_{V_i}^U(s)=f_{V_i}^U(s)=s_i$ per ogni i. □

I prefasci Im(φ) e Coker(φ) in generale non sono fasci. Diamo un controesempio per Im(φ).

Logaritmo complesso: la funzione exp:$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ e' olomorfa, non si annulla mai e exp($\mathbb{C}$)=$\mathbb{C}$*. Sia R una regione di $\mathbb{C}$, Log:R$\to\mathbb{C}$ e' una funzione logaritmo su R se exp(Log(z))=z per ogni z$\in\mathbb{C}$. Indichiamo con log:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ il logaritmo reale. Sia z$\in\mathbb{C}$, z$\neq$0, scriviamo z=r$e^{i\vartheta}$. Posto w=log(r)+iϑ+2nπi si ha $e^w=e^{log(r)}e^{i\vartheta}e^{2n\pi}=re^{i\vartheta}$ per ogni n$\in\mathbb{Z}$. Quindi per ogni z$\neq$0 esistono infiniti logaritmi di z. Consideriamo allora $\mathbb{C}^-$ ovvero $\mathbb{C}$ privato del semiasse reale negativo, allora -$\pi\leq\vartheta\leq\pi$ e se z=r$e^{i\vartheta}$ abbiamo la determinazione principale Log(z)=log(r)+iϑ. In particolare non esiste

alcuna funzione logaritmo definita su tutto $\mathbb{C}^*$.
Consideriamo ora lo spazio topologico $X=\mathbb{C}$ con la topologia usuale e sia $\Im=\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, poniamo infine $\aleph=\mathbb{O}^*_{\mathbb{C}}$ il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ che non si annullano. La mappa esponenziale $\varphi=\exp$ definisce un morfismo di fasci $\varphi:\Im\to\aleph$. Proviamo che il prefascio $\mathrm{Im}(\varphi)$ non e' un fascio. Sia $U=\mathbb{C}^*$ aperto di X, consideriamo $V=\mathbb{C}^-$ e $W=\mathbb{C}^+$ come ricoprimento di U. Ora su V esiste un logaritmo Log_V e su W esiste un logaritmo Log_W, pertanto $\varphi(\mathrm{Log}_V)=\mathrm{Id}_V$ e $\varphi(\mathrm{Log}_W)=\mathrm{Id}_W$ quindi la funzione identita' appartiene alle sezioni $\mathbb{O}^*_{\mathbb{C}}(V)$ e $\mathbb{O}^*_{\mathbb{C}}(W)$. Se $\mathrm{Im}(\varphi)$ fosse un fascio, poiche' le due funzioni identita' coincidono su $V\cap W$, avremmo che esiste una funzione $I\in\mathrm{Im}(\varphi)$ che coincide con l'identita' su $V\cup W=U$, dunque esisterebbe $L\in\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(L)=e^L=\mathrm{Id}_U$, ovvero L e' una funzione logaritmo su $U=\mathbb{C}^*$, assurdo. Abbiamo cosi' esibito un prefascio che non e' un fascio.

Vogliamo ora costruire un fascio associato a un prefascio, in modo da poter rendere fasci anche l'immagine e il Coker di un morfismo.
Sia $\Im$ un prefascio su X, consideriamo l'unione disgiunta delle spighe $\dot{\bigcup}\Im_x$. Definiamo un nuovo prefascio su X che indicheremo con $\Im^+$ mediante l'associazione $U\mapsto\Im^+(U)$ dove

$$\Im^+(U)=\{f:U\to\dot{\bigcup}\Im_x\} \text{ tali che}$$

- $f(x)\in\Im_x$ per ogni x,
- per ogni $x\in U$ esiste V con $x\in V\subseteq U$ e $s\in\Im(U)$ tale che $f(y)=s_y$ per ogni $y\in V$.

Sia $\{V_i\}$ un ricoprimento aperto di U. Sia $f\in\Im^+(U)$ tale che $f_{V_i}=0$, sia $x\in U$ allora $x\in V_i$ per qualche i e a meno di rimpicciolire V_i sappiamo che esiste $s\in\Im(V_i)$ tale che $f(y)=s_y$ per ogni $y\in V_i$ quindi $s_y=0$ per ogni $y\in V_i$ e allora $s_x=0$ per ogni $x\in U$ da cui $f(x)=0$ per ogni $x\in U$.
Supponiamo ora di avere $f_i\in\Im^+(V_i)$ tali che $f_i=f_j$ su $V_i\cap V_j$. Consideriamo la mappa f definita come $f(x)=f_i(x)$ se $x\in V_i$ e se $x\in V_i\cap V_j...\cap V_k$ poniamo $f(x)=f_t(x)$ per qualche indice t nell'intersezione. La mappa f e' ben definita inoltre $f:\bigcup V_i=U\to\dot{\bigcup}\Im_x$ e $f_{V_i}=f_i$ per ogni i.
Quindi $\Im^+$ e' un fascio detto **fascio associato** al prefascio $\Im$.
Diamo ora un'altra descrizione di questo oggetto. Sia $\Im$ un prefascio, consideriamo $S=\dot{\bigcup}\Im_x$. Definiamo una mappa di proiezione $p:S\to\dot{\bigcup}\Im_x$ definita da $p(s_x)=x$ per ogni $s_x\in\dot{\bigcup}\Im_x$.
Per ogni U aperto di X e per ogni $s\in\Im(U)$ definiamo $(U,s)=\{s_x\in\dot{\bigcup}\Im_x$ tali che $x\in U\}$, la famiglia degli (U,s) definisce una topologia su S rispetto alla quale p e' un omeomorfismo locale. Sia V un aperto di X, una sezione di $p:S\to X$ e' una mappa

σ:V$\rightarrow$p^{-1}(V) tale che pσ=Id$_V$. Notiamo con Γ(V,S) l'insieme delle sezioni di S sopra V. Mediante l'assegnazione V$\mapsto\Gamma$(V,S) definiamo un fascio su X detto **l'espace ètalè** di $\Im$ che e' proprio il fascio $\Im^+$ associato al prefascio $\Im$.

Sia Sh(X) la categoria dei fasci su X. Siano $\Im$ e $\aleph$ due fasci su X e sia φ:$\Im\rightarrow\aleph$ un morfismo di fasci. Possiamo considerare $\Im$ e $\aleph$ come due funtori contravarianti F,G:Top(X)$\rightarrow$Ab e φ come morfismo funtoriale tra F e G. Sappiamo che Ker(φ)$\in$Sh(X). Il morfismo φ e' un monomorfismo se e solo se Ker(φ)=$0_{Sh(X)}$ se e solo se Ker(φ(U))=0 per ogni U aperto di X, per come e' definito Ker(φ), dunque se e solo se φ(U):$\Im$(U)$\rightarrow\aleph$(U) e' iniettivo per ogni U.
Se ora φ(U):$\Im$(U)$\rightarrow\aleph$(U) e' suriettivo per ogni U aperto di X, allora φ(U)=Im(φ(U))=$\aleph$(U) per ogni U, per come e' definito il prefascio Im(φ) ho che Im(φ)=$\aleph$ ovvero φ:$\Im\rightarrow\aleph$ e' suriettivo.

Vogliamo ora vedere che il comportamente globale di un fascio e' dettato dal comportamente locale sulle spighe.

Proposizione 3. Sia φ:$\Im\rightarrow\aleph$ un morfismo di fasci.

(1) Per ogni p si ha Ker(φ_p)=Ker(φ)$_p$ e Im(φ_p)=Im(φ)$_p$,
(2) φ e' iniettivo se e solo se φ_p e' iniettivo per ogni p,
(3) φ e' suriettivo se e solo se φ_p e' suriettivo per ogni p,
(4) la successione ...$\Im^{n-1}\xrightarrow{\varphi^{n-1}}\Im^n\xrightarrow{\varphi^n}\Im^{n+1}$... e' esatta se e solo se la successione sulle spighe ...$\Im_p^{n-1}\xrightarrow{\varphi_p^{n-1}}{\Im^n}_p\xrightarrow{\varphi_p^n}{\Im^{n+1}}_p$... e' esatta per ogni p.

Dimostrazione. 1) Sia s$_p\in$Ker(φ_p) allora φ_p(s$_p$)=(φ(s))$_p$=0. Allora φ(s)$_V$=0 dove V e' un aperto contenete p. Abbiamo quindi che φ(s)$_V$=g$_V^U$(φ(s))=φ(V)(f$_V^U$(s))=0 quindi s$_V\in$Ker(φ(V)) e quindi s$_p\in$Ker(φ)$_p$.
Sia ora s$_p\in$Ker(φ)$_p$ allora f$_p^U$(s)$\in$f$_p^U$(Ker(φ) pertanto esiste v$\in$Ker(φ) tale che f$_p^U$(s)=v ovvero s$_p$=v$_p$. Ora φ_p(s$_p$)=φ_p(v$_p$)=(φ(v))$_p$=0, dunque s$_p\in$Ker(φ_p).
Sia ora v$_p\in$Im(φ)$_p$=g$_p^U$(Im(φ)) allora esiste w$\in$Im(φ) tale che v$_p$=w$_p$. Poioche' w$\in$Im(φ) abbiamo che esiste u$\in\Im$(U) tale che φ(u)=w. Ora φ_p(v$_p$)=φ(v)$_p$=w$_p$=v$_p$ quindi v$_p\in$Im(φ_p).
Sia w$_p\in$Im(φ_p) allora esiste v$_p\in\Im_p$ tale che φ_p(v$_p$)=w$_p$. Ora w$_p$=φ_p(v$_p$)=φ(v)$_p$ con v$\in\Im$(U) rappresentante di v$_p$, quindi w$_p\in$Im(φ)$_p$.
2) Supponiamo che φ sia iniettivo allora ker(φ)={0} per ogni p abbiamo Ker(φ_p)=Ker(φ)$_p$={0} dunque φ_p e' iniettivo per ogni p.
Suppoiamo ora φ_p iniettivo per ogni p. Proviamo che φ(U) e' iniettivo per ogni U aperto di X. Sia s$\in$Ker(φ(U)) allora φ(s)=0 e φ(s)$_p$=0 per ogni p. Ora

$\varphi(s)_p=\varphi_p(s_p)=0$ per ogni p, e φ_p iniettivo implica $s_p=0$ per ogni p. Quindi per ogni p esiste V_p intorno di p tale che $s_{V_p}=0$. Ora $\{V_p\}_p$ ricopre U, $s_{V_p}=0$ per ogni p e $\Im$ fascio implica che s=0 quindi $\varphi(U)$ e' iniettivo per ogni U e allora φ e' iniettivo.

3) Sia φ suriettivo, per ogni p abbiamo $\mathrm{Im}(\varphi_p)=\mathrm{Im}(\varphi)_p=\aleph_p$, quindi φ_p e' suriettivo per ogni p.

Supponiamo ora φ_p suriettivo per ogni p. Riguardiamo $\Im$ e $\aleph$ come unione disgiunta delle loro spighe. Allora $\varphi(\Im)=\varphi(\dot{\bigcup}\Im_p)=\dot{\bigcup}\varphi(\Im_p)=\dot{\bigcup}\varphi_p(\Im_p)=\dot{\bigcup}\aleph_p=\aleph$. Quindi φ e' suriettivo.

4) Supponiamo che la successione $...\Im^{n-1}\xrightarrow{\varphi^{n-1}}\Im^n\xrightarrow{\varphi^n}\Im^{n+1}...$ sia esatta. Allora $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})$, per ogni p abbiamo $\mathrm{Ker}(\varphi^n)_p=\mathrm{Im}({\varphi^{n-1}}_p)$ ovvero $\mathrm{Ker}(\varphi_p^n)=\mathrm{Im}(\varphi_p^{n-1})$ quindi la successione sulle spighe e' esatta per ogni p.

Supponiamo ora che sia $\mathrm{Ker}(\varphi_p^n)=\mathrm{Im}(\varphi_p^{n-1})$ per ogni p, ovvero $\mathrm{Ker}(\varphi^n)_p=\mathrm{Im}({\varphi^{n-1}}_p)$ per ogni p. Sia $s\in\mathrm{Ker}(\varphi^n)$ allora per ogni p abbiamo che $s_p\in\mathrm{Ker}(\varphi^n)_p=\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})_p)$. Quindi esiste $t\in\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})$ tale che $t_p=s_p$ per ogni p. Pertanto esiste V_p tale che $t_{V_p}=s_{V_p}$. Ora i $\{V_p\}$ ricoprono U e $t_{V_p}=s_{V_p}$ per ogni p implica che t=s percui $s\in\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})$. Sia ora $s\in\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})$ allora $s_p\in\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})_p=\mathrm{Ker}(\varphi^n)_p$, allora esiste $t\in\mathrm{Ker}(\varphi^n)$ tale che $s_p=t_p$ per ogni p e pertanto esiste V_p tale che $t_{V_p}=s_{V_p}$, come prima abbiamo che s=t e $s\in\mathrm{Im}(\varphi^{n-1})$. $\square$

Proposizione 4. Sia $\varphi:\Im\rightarrow\aleph$ un morfismo di fasci. Allora φ e' un isomorfismo se e solo se φ_p e' un isomorfismo per ogni p.

Dimostrazione. Sia φ un isomorfismo allora esiste un morfimo $\psi:\aleph\rightarrow\Im$ tale che $\psi\varphi=\mathrm{Id}_\Im$ e $\varphi\psi=\mathrm{Id}_\aleph$. Allora $\varphi_p f_p^U=g_p^U\varphi(U)$ e $f_p^U\psi(U)=\psi_p g_p^U$ per ogni U aperto contenete p. Allora $\psi_p\varphi_p f_p^U=\psi_p g_p^U\varphi(U)=f_p^U\psi(U)\varphi(U)=f_p^U$ da cui $\psi_p\varphi_p=\mathrm{Id}_{\Im_p}$, in modo analogo $\varphi_p\psi_p=\mathrm{Id}_{\aleph_p}$. Quindi φ_p e' isomorfismo.

Per provare che φ e' isomorfismo proveremo che $\varphi(U)$ e' isomorfismo per ogni U infatti fatto cio' potremmo definire il morfismo inverso ψ come $\psi(U)=\varphi(U)^{-1}$.

Sia ora φ_p un isomorfismo per ogni p. Abbiamo gia' visto che φ_p iniettivo per ogni p implica che $\varphi(U)$ e' iniettivo per ogni U. Vediamo ora che $\varphi(U)$ e' suriettivo per ogni U. Sia $t\in\aleph(U)$ e per ogni $p\in U$ sia $t_p\in\aleph_p$ il suo germe in p. Essendo φ_p suriettiva possiamo trovare $s_p\in\Im_p$ tale che $\varphi_p(s_p)=t_p$. Sia s(p) un rappresentate di s_p su una sezione $\Im(V_p)$, allora $\varphi(s(p))$ e t_{V_p} sono due elementi di $\aleph(V_p)$ che hanno lo stesso germe in p, pertanto a meno di sostituire a V_p un intorno di p piu' piccolo, abbiamo che $\varphi(s(p))=t_{V_p}$. Ora U e' ricoperto dai V_p e per ogni p abbiamo una sezione $s(p)\in\Im(V_p)$. Siano p,q due punti allora $s(p)_{V_p\cap V_q}$ e $s(q)_{V_p\cap V_q}$ sono due sezioni mandate da φ in $t_{V_p\cap V_q}$, per l'iniettivita' di φ si ha che $s(p)_{V_p\cap V_q}=s(q)_{V_p\cap V_q}$.

Allora esiste s$\in\Im$(U) tale che s$_{V_p}$=s(p) per ogni p. Ora φ(s) e t sono sezioni di $\aleph$(U) tali che φ(s)$_{V_p}$=t$_{V_p}$ per ogni p e quindi φ(s)=t. $\square$

Proposizione 5. Sia φ:$\Im\rightarrow\aleph$ un morfismo di fasci.

(1) $\Im$/Ker(φ)$\cong$Im(φ),
(2) $\aleph$/Im(φ)$\cong$Coker(φ).

Dimostrazione. Per ogni U aperto di X abbiamo un morfismo di gruppi φ(U):$\Im$(U)$\rightarrow\aleph$(U).
1) Dai teoremi d'isomorfismo per gruppi abbiamo un isomorfismo φ*(U):$\Im$(U)/Ker(φ(U))$\rightarrow$Im(φ(U)) definito da φ*(U)(s+Ker(φ(U)))=φ(U)(s). Definiamo tra i due fasci la mappa φ* che associa ad U proprio l'isomorfismo φ*(U), se proviamo che tale mappa e' un morfismo di fasci allora sara' anche un isomorfismo. Consideriamo l'inclusione V$\subset$U e la seguente situazione.

$$\begin{tikzcd}
\Im(U)/Ker(\varphi(U)) \arrow[r, "\varphi*(U)"] \arrow[d, "Q_V^U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Im(\varphi(U)) \arrow[d, "I_V^U"] \\
\Im(V)/Ker(\varphi(V)) \arrow[r, "\varphi*(V)"'] & Im(\varphi(V))
\end{tikzcd}$$

Il diagramma commuta, infatti I$_V^U\varphi$*(U)(s+Ker(φ(U)))=I$_V^U$(φ(U)(s))=g$_V^U\varphi$(U)(s) e φ*(V)Q$_V^U$(s)=φ*(V)(f$_V^U$(s)+Ker(φ(V)))=φ(V)(f$_V^U$(s))=g$_V^U\varphi$(U)(s), poiche' φ e' un morfismo.
2) Per ogni U abbiamo che Coker(φ(U))=$\aleph$(U)/Im(φ(U))=($\aleph$/Im(φ))(U), quindi Coker(φ)$\cong\aleph$/Im(φ). $\square$

A.M. - 19 Marzo 2008