IL TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN

Queste note sono state scritte durante un corso di dottorato sul *"Teorema della mappa di Riemman"*. Il corso è stato tenuto presso la facoltà di matematica di Ferrara dal *prof. Andrea Del Centina* nel Giugno del 2008.

Nota Storica

Riemann tenne la sua discussione inaugurale, intitolata "Grundelegen für eine allgemeine Theorie der Functionen eine verhandlichen complexen grösse", nel 1851.
Il teorema della mappa asserisce che ogni regione (aperto connesso) R di $\mathbb{C}$ diversa da $\mathbb{C}$ è biolomorfa al disco unitario $D_1(0)$.
Il teorema non venne provato da Riemann, infatti nella dimostrazione si faceva uso del principio di Dirichlet. In seguito Weirstrass trovò un controesempio a questo principio. La prima dimostrazione completa arrivò solo nel 1900 ad opera di W. Fogg Osgad.
La dimostrazione riportata in queste note è dovuta a P. Koebe che la sviluppò tra il 1907 e il 1925. Il teorema di Montel, dimostrato nel 1925, semplificò la dimostrazione di Koebe.
La dimostrazione fa uso del lemma di Schwarz sulla struttura delle funzioni olomorfe del disco, del teorema di Rouché sugli zeri delle funzioni olomorfe e del torema di Montel sulle famiglie di funzioni olomorfe.

Osserviamo per prima cosa che non può esistere un biolomorfismo φ di $\mathbb{C}$ in $D_1(0)$. Infatti $\varphi \in \mathbb{O}(\mathbb{C})$ ovvero φ è intera, inoltre $|\varphi(z)|<1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ quindi φ è limitata, per il teorema di Liouville concludiamo che φ è costante. Pertanto da $\mathbb{C}$ in $D_1(0)$ non possono esistere biolomorfismi ma solo mappe olomorfe.
Proseguiamo ora con i risultati che porteranno alla dimostrazione del teorema della mappa.

Lemma 0.0.1. ***(Schwarz)*** *Ogni funzione olomorfa sul disco $D=D_1(0)$ tale che $f(0)=0$ e $|f(z)|<1$ per ogni $z \in D$ soddisfa i seguenti fatti:*

1. *$|f(z)|<|z|$ per ogni $z \in D$;*
2. *se esiste $\xi \in D$, $\xi \neq 0$, tale che $|f(\xi)|=|\xi|$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda|=1$, tale che $f(z)=\lambda z$ per ogni $z \in D$. Notiamo che in tal caso f è una funzione razionale del tipo $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ con $c=b=0$ ovvero f è una rotazione.*

Dimostrazione: Poniamo $h(z)=\frac{f(z)}{z}$ e consideriamo lo sviluppo di Taylor della funzione f olomorfa nel disco nella forma

$f(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n+...$, ora $f(0)=a_0=0$ implica che $f(z)=a_1z+...+a_nz^n+...$ pertanto $h(z)=a_1+...+a_nz^{n-1}+...$ è olomorfa in D.
Ora $|h(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}<\frac{1}{|z|}$ per ogni z∈D, da cui $\max_{|z|=r}|h(z)|\leq\frac{1}{r}$, $0<r<1$ e passando al limite per $r\mapsto 1$ si ha $|h(z)|\leq 1$ e quindi $|f(z)|\leq|z|$.
Supponiamo ora che esista $\xi\neq 0$ tale che $|f(\xi)|=|\xi|$ allora $|h(\xi)|=1$. Vediamo che h assume il suo massimo in $\xi\in D$ e per il principio del massimo è costante in D quindi $h(z)=\lambda$ con $|\lambda|=1$ e $f(z)=\lambda z$. □

Teorema 0.0.1. (Rouché) Siano f e g due funzioni olomorfe in una regione R di $\mathbb{C}$, sia γ un cammino differenabile a tratti, semplicemente chiuso (per ogni $z\in Int(\gamma)$ si che $I(\gamma,z)=1$), omologo a zero in R ($Int(\gamma)\subseteq R$) e tale che f e g non hanno zeri su $|\gamma|$. Se $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ per ogni $z\in|\gamma|$ allora f e g hanno lo stesso numero di zeri in $Int(\gamma)$.

<u>Dimostrazione</u>: Poniamo $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, allora h è meromorfa in R. Per ipotesi g non ha zeri si $|\gamma$ e quindi h non ha poli su $|\gamma|$, esiste allora un intorno aperto U di $|\gamma|$ nel quale h è olomorfa. Sappiamo che $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ per ogni $z\in|\gamma|$ e dividendo per $|g(z)|$ si ha $|h(z)-1|<1$ per ogni $z\in|\gamma|$, ora h è in particolare continua, pertanto a meno di restringere U possiamo supporre che sia $|h(z)-1|<1$ per ogni z∈U. Quindi $h(U)\subseteq D_1(1)\subseteq\mathbb{C}^-$ pertanto è ben definita in U la funzione log(h) che è una primitiva di $\frac{h'}{h}$ in U.
Ora il cammino γ è omologo a zero in R e per il teorema di Cauchy si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h'}{h}ds=0.$$

Notiamo che $h'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ da cui $\frac{h'}{h}=\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'}{g}ds=0.$$

Da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'}{g}ds.$$

Quindi Z(f)-P(f)=Z(g)-P(g) in $Int(\gamma)$, ma P(f)=P(g)=0 in $Int(\gamma)$. Concludiamo che Z(f)=Z(g) in $Int(\gamma)$. □

Definizione 0.1. Una famiglia di funzioni $\Im$ si cointinue in una regione R si dice normale se ogni successione $\{f_n\}$ in $\Im$ contiene una sottosuccessione convergente uniformamente sui compatti.
La famiglia $\Im$ si dice equicontinua in un aperto R'⊆R se per ogni $f\in\Im$ e per ogni $\epsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che per ogni $f\in\Im$ si ha $|f(z)-f(w)|<\epsilon$ per ogni z,w∈R' con $|z-w|<\delta$.

La famiglia $\Im$ si dice locolmente equicontinua in R se per ogni z$\in$R e per ogni f$\in\Im$ esiste un intorno aperto U di z, con U$\subseteq$R tale che f è equicontinua in U.

Definizione 0.2. Una famiglia $\Im$ di funzioni olomorfe in R si dice limitata in A$\subseteq$R se esiste M>0 tale che $||f||_A \leq$M per ogni f$\in\Im$.
La famiglia $\Im$ è detta localmente limitata in R se per ogni z$\in$R esiste U$\subseteq$R intorno aperto di z tale che $\Im$ è limitata in U.

Ricordiamo ora il teorema di Ascoli - Arzelà che sarà necessario in seguito.

Teorema 0.0.2. (Ascoli - Arzelà) Una famiglia $\Im$ di funzioni continue in una regione R è normale se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

1. la famiglia $\Im$ è equicontinua in ogni compatto K di R;

2. per ogni z$\in$R esiste un compatto K_z tale che f(z)$\in K_z$ per ogni f$\in\Im$.

Lemma 0.0.2. *Una famiglia $\Im$ di funzioni olomorfe in una regione R localmente limitata in R è anche localmente equicontinua in R.*

Dimostrazione: Basta provare che per ogni c$\in$R e per ogni ϵ>0 esiste D(c)$\subseteq$R tale che |f(w)-f(z)|<ϵ per ogni z,w$\in$D(c), dove f$\in\Im$.
Sia r>0 tale che $\overline{D_{2r}(c)}\subseteq$R. Per la formula di Cauchy si ha che:

$$f(w)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta D_{2r}(c)}\frac{f(\xi)}{(\xi-w)}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta D_{2r}(c)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}d\xi=\frac{w-z}{2\pi i}\int_{\delta D_{2r}(c)}\frac{f(\xi)}{(\xi-w)(\xi-z)}d\xi.$$

Prendiamo w,z$\in D_r$(c) allora $|(\xi-w)(\xi-z)|\geq r^2$. Pertanto valgono le maggiorazioni seguenti:

$$|f(w)-f(z)|\leq\frac{|w-z|}{2\pi}\int_{\delta D_{2r}(c)}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-w||\xi-z|}d\xi\leq\frac{|w-z|}{r}||f||_{\delta D_{2r}(c)}\leq\frac{|w-z|}{r}||f||_{\overline{D_{2r}(c)}}$$

Poiche $\Im$ è localmente limitata in R si ha che

$$\frac{1}{2\pi}\sup\{||f||_{\overline{D_{2r}(c)}} \text{ con } f\in\Im\}=C<+\infty$$

Possiamo supporre C>0, perchè in caso contrario avremo una famiglia di funzioni identicamente nulle. Per concludere basta scegliere D_δ(c) con δ=min($\frac{\epsilon}{C}$,r).

□

Teorema 0.0.3. (H$\ddot{u}$rwitz) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in R, convergente sui compatti ad una funzione f olomorfa in R. Sia A un aperto limitato di R tale che $\overline{A}\subseteq$R e f non ha zeri su δA. Allora esiste un indice n_A tale che le funzioni f e f_n hanno lo stesso numero di zeri in $\overline{A}$ per ogni n>n_A.
In particolare se tutte le f_n non si annullano in R e f non è identicamente nulla in R allora anche f è priva di zeri in R.

Dimostrazione: Supponiamo dapprima che A sia un disco D tale che $\overline{D}\subseteq$R, ora δD è semplicemente chiuso e omologo a zero in R, pertanto possiamo applicare il teorema di Rouché.
Sia m=min{$|f(\xi)$ con $\xi\in\delta D$}, f non zeri su δD e quindi m>0. Possiamo scegliere n_D abbastanza grande in modo che $||f_n-f||<m$ per ogni $n>n_D$.
Allora $|f_n(\xi)-f(\xi)|<|f(\xi)|$ e per il teorema di Rouché f_n e f hanno lo stesso numero di zeri in D per ogni $n>n_D$. Ora se le f_n avessero uno zero su δD per continuità questo sarebbe uno zero anche per f, ma per ipotesi f è priva di zeri su δD. Allora le f_n e f hanno lo stesso numero di zeri su $\overline{D}$ per ogni $n>n_D$.
Sia ora A un aperto limitato qualsiasi in R, sappiamo che $\overline{A}$ è compatto e che f non è identicamente nulla in R allora f ha un numero finito di zeri $z_1,...,z_k$ in $\overline{A}$. Tali zeri sono discreti quindi possiamo trovare k dischi $D_1(z_1),...,D_k(z_k)$ tali che $D_i\cap D_j$ è vuoto se $i\neq j$. Quindi f non ha zeri nel compatto $A-\bigcup_{i=1}^k D_i$, allora esiste n_A tale che f_n non ha zeri in $A-\bigcup_{i=1}^k D_i$ per ogni $n>n_A$. Grazie alla prima parte della dimostrazione sui dischi $D_1,...,D_k$ concludiamo che f e f_n hanno lo stesso numero di zeri in $\overline{A}$ per ogni $n>n_A$. □

Teorema 0.0.4. (Montel) Una famiglia $\Im$ di funzioni olomorfe in R è normale se e solo se $\Im$ è localmente limitata in R.

Dimostrazione: Supponiamo che $\Im$ sia una famiglia normale in R. Basta provare che sup{$||f||_K$ con $f\in\Im$} è finito per ogni K compatto in R. Supponiamo per assurdo che esista K' compatto in R tale che sup{$||f||_{K'}$ con $f\in\Im$}=∞ allora esiste una successione $\{f_n\}\subseteq\Im$ tale che $||f_n||_{K'}\overset{n\mapsto\infty}{\longrightarrow}=+\infty$. Per ipotesi di normalità esiste una sottosuccessione $\{f_{n_i}\}$ che converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa f. Abbiamo che:

$$||f||_{K'}=||f-f_n+f_n+f_{n_i}-f_{n_i}||_{K'}\geq||f_n||_{K'}-||f-f_{n_i}||_{K'}-||f_n-f_{n_i}||_{K'},$$

per $n_i\mapsto\infty$ gli ultimi due addendi tendono a zero mentre il primo diverge. Assurdo perchè f è olomorfa su K' e in particolare limitata.
Viceversa supponiamo che $\Im$ sia localmente limitata in R. Allora $\Im$ è localmente equicontinua e quindi equicontinua sui compatti, pertanto vale il punto 1) del teorema di Ascoli-Arzelà. Inoltre grazie alla locale limitatezza di $\Im$ vale anche il punto 2) del teorema. Quindi il teorema di Ascoli-Arzelà ci assicura che $\Im$ è normale. □

Proviamo ora il teorema della mappa di Riemann. La prima parte è un teorema di unicità di facile dimostrazione. La seconda parte, che prova l'esistenza, richiede invece una dimostrazione molto articolata. Enunciamo prima un teorema noto in analisi complessa che dà l'equivalenza di sei fatti. Dopo aver dimostrato il teorema della mappa potremmo aggiungere altre quattro proposisizioni equivalente ed ottenere così il teorema generale di Cauchy.

Teorema 0.0.5. Per una regione R sono equivalenti i seguenti fatti

1. R è omologicamente semplicemente connessa (per ogni γ cammino differenziabile a tratti in R si ha Int(γ)$\subseteq$R);

2. ogni funzione olomorfa in R è integrabile in R;

3. per ogni funzione f olomorfa in R e per ogni ciclo σ in R si ha che

$$\mathrm{I}(\sigma,\mathrm{z})\mathrm{f}(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \text{ per ogni z}\in\mathrm{R}\text{-}|\sigma|;$$

4. per ogni ciclo σ in R si ha Int(σ)$\subseteq$R;

5. ogni funzione olomorfa in R e priva di zeri in R ha un logaritmo olomorfo in R;

6. ogni elemento invertibile in $\mathbb{O}$(R) (ovvero ogni funzione olomorfa priva di zeri in R) ammette una radice quadrata olomorfa in R.

Teorema 0.0.6. (Della mappa di Riemann) Sia R una regione semplicemente connessa R$\neq\mathbb{C}$ e sia c$\in$R. Allora esiste un'unica mappa f olomorfa in R tale che:

1. f(c)=0;

2. f'(c)$\in\mathbb{R}$ e f'(c)>0;

3. f è un biolomorfismo tra R e $D_1(0)$.

Dimostrazione: (UNICITA') Supponiamo che esistano due funzioni f e g con tali proprietà. Allora la mappa h=f$\circ$g^{-1}:$D_1(0)\rightarrow D_1(0)$ è un biolomorfismo del disco. Notiamo che h(0)=0 e h'(0)>0.
Per il punto 1) del lemma di Schwarz si ha che |h(z)|$\leq$|z| per ogni z$\in D_1(0)$. Questo ragionamento vale anche per h^{-1}, pertanto |h^{-1}(h(z))|=|z|$\leq$|h(z)|. Deve essere allora |h(z)|=|z| per ogni z$\in D_1(0)$.
Allora per il punto 2) del lemma di Schwarz si ha che esiste $\lambda\in\mathbb{C}$ con $|\lambda|=1$ tale che h(z)=λz, da cui h'(z)=λ. Allora $\lambda\in\mathbb{R}$ e $\lambda>0$ con $|\lambda|=1$ implica che $\lambda=1$.
Concludiamo che h=$\mathrm{Id}_{D_1(0)}$ e quindi f=g.
(ESISTENZA) Sia $\Im$ una famiglia di funzioni olomorfe in R, g:R$\rightarrow\mathbb{C}$, iniettive e tali che |g(z)|<1 per ogni z$\in$R e g'(c)>0. Suddividiamo la dimostrazione in tre passi.

1. Proviamo che $\Im$ è non vuota.

   Consideriamo un cammino chiuso γ:[0,1]$\rightarrow$R e suddividiamolo in due cammini γ_1:[0,$\frac{1}{2}$]$\rightarrow$R e γ_2:[$\frac{1}{2}$,1]$\rightarrow$R tali che γ=γ_1-γ_2. Poichè R è semplicemente connessa esiste un omotopia F(s,t) che deforma con continuità γ_1 in γ_2. Possiamo scegliere s' sufficentemente piccolo in modo che il cammino F(s',t)=γ' sia abbastanza vicino a γ_1 così che si possa ricoprire i commini con un numero finito di dischi. Integrando una funzione olomorfa lungo le porzioni di cammini contenute in ogni disco e lungo i commini radiali si trova che

   $$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_{\gamma'} f\,ds$$

   Procedendo così si ricava che $\int_{\gamma_1}$f ds=$\int_{\gamma_2}$f ds. Allora

   $$\int_{\gamma} f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds - \int_{\gamma_2} f\,ds = 0$$

   Per l'equivalenza di 1) e 2) nel teorema precedente concludiamo che R è omologicamente semplicemente connessa.

   Abbiamo provato così che l'omotopia implica l'omologia. Grazie al teorema della mappa potremmo affermare che vale anche l'implicazione inversa.

   Sia a$\notin$R allora la funzione z-a$\neq$0 in R e quindi ammette una radice quadrata olomorfa in R che denotiamo con r(z)=$\sqrt{z-a}$. Ora r(z) è iniettiva e non nulla in R, inoltre r'(c)=$\frac{1}{2r(c)}\neq$0.

   Consideriamo r(R), r è continua e quindi mappa connessi in connessi, inoltre per il teorema della mappa aperta r(R) è aperto, quindi r(R) è una regione di $\mathbb{C}$. Notiamo che 0$\notin$r(R) e che esiste δ>0 tale che D_δ(r(c))$\subseteq$R. Allora |r(c)|>δ e |r(c)-(-r(c))|$\leq$2|r(c)|>δ. Consideriamo ora la funzione

   $$G(z)=\frac{\delta}{4}\frac{|r'(c)|}{|r(c)|^2}\frac{r(z)-r(c)}{r(z)+r(c)}.$$

   La funzione G è iniettiva poichè lo è la funzione razionale $\frac{r(z)-r(c)}{r(z)+r(c)}$. Ricordando che |r(c)|>$\frac{\delta}{2}$ valogono le seguenti maggiorazioni.

   $$\left|\frac{r(z)-r(c)}{r(z)+r(c)}\right|\leq|r(c)|\left|\frac{1}{r(c)}-\frac{2}{r(z)+r(c)}\right|<\frac{4}{\delta}|r(c)|.$$

   Allora |G(c)|<1, inoltre G(c)=0 e G'(c)=$\frac{\delta}{9}\frac{|r'(c)|}{|r(c)|^2}$>0, quindi G$\in\Im$ e $\Im$ è non vuota.

2. La famiglia $\Im$ contiene una funzione f tale che |f'(c)| è massimo tra tutti i valori |g'(c)| al variare di g in $\Im$.

   Poniamo M=Sup{|g'(c)| al variare di g in $\Im$}. Esiste una successione di funzioni $\{g_n\}$ in $\Im$ tale che $|g_n(c)| \to M$ per $n \mapsto \infty$. Ora per ogni $g \in \Im$ si ha $|g(z)|<1$ pere ogni $z \in R$ quindi per ogni compatto $K \subseteq R$ si ha che $\mathrm{Sup}\{||g||_K$ con $g \in \Im\}<1$ pertanto $\Im$ è localmente limitata. Per il teorema di Montel $\Im$ è normale quindi esiste una sottosuccessione $\{g_{ni}\}$ di $\{g_n\}$ uniformemente convergente sui compatti di R. Sia $f \in \mathbb{R}$ il limite di tale sottosuccessione. Chiaramente $|f(z)|<1$ per ogni $z \in R$, inoltre $f(c)=0$ e $|f'(c)|=M>0$. Da $|f'(c)|=M>0$ segue che f non è costante e per il principio del massimo si ha $|f(z)|<1$ per ogni $z \in R$. Per provare che $f \in \Im$ basta provare che f è iniettiva. Fissiamo $\xi \in R$ e consideriamo $g_\xi(z)=g(z)-g(\xi)$ con $g \in \Im$, $g_\xi(z) \neq 0$ in $R-\{\xi\}$. La dunzione $f(z)-f(\xi)$ è il limite delle $g_\xi(z)$ allora per il teorema H$\ddot{u}$rwitz si ha che $f(z)-f(\xi)$ è priva di zeri in $R-\{\xi\}$, quindi $f(z)=f(\xi)$ se e solo se $z=\xi$ ovvero f è iniettiva.

3. Abbiamo provato che esiste una f olomorfa in R, a valori in $D_1(0)$, iniettiva tale che $f(c)=0$ e $|f'(c)|>0$. Proviamo che f è suriettiva
   Supponiamo per assurdo che esista w con $|w|<1$ tale che $f(z) \neq w$ per ogni $z \in R$. Allora la funzione $p(z)=\frac{f(z)-w}{1-\overline{w}f(z)}$ è diversa da zero per ogni $z \in R$. Per 6) p(z) ammette una radice quadrata olomorfa in R, sia P(z) tale radice. Ora f iniettiva implica p iniettiva e quindi anche P è iniettiva. Inoltre $|f(z)|<1$ in R implica $|p(z)|<1$ in R. Infatti se consideriamo la funzione $h(\xi)=\frac{\xi-w}{1-\overline{w}\xi}$. Abbiamo che $1-\overline{w}\xi=0$ se e solo se $\xi=\frac{1}{w}$, ma $|w|<1$ implica $|\xi|>1$ e quindi h è olomorfa in $\overline{D_1(0)}$. Se $|\xi|=1$ ovvero $\xi=e^{i\theta}$ allora

   $$|\frac{\xi-w}{1-\overline{w}\xi}|=\frac{|e^{i\theta}-w|}{|e^{i\theta}||e^{-i\theta}-\overline{w}|}<\frac{|e^{i\theta}-w|}{|e^{i\theta}-w|}=1.$$

   Per il principio del massimo si ha $|h(z)|<1$ in $D_1(0)$ quindi $|p(z)|<1$ in R, da cui $|P(z)|<1$ in R. Si ha che

   $$P'(z)=\frac{1}{2P(z)}\frac{f'(1-w\overline{w})}{(1-\overline{w}f}^2,$$

   vediamo che $P'(c) \neq 0$. Poniamon ora

   $$\psi(z)=\frac{|P'(c)|}{P'(c)}\frac{P(z)-P(c)}{1-\overline{P(c)}P(z)},$$

   si ha $\psi(c)=0$ e ψ iniettiva via l'iniettività della P. Ragionando come si è fatto per la P si ha che $|\psi(z)|<1$ in R, inoltre da

   $$|\psi'(c)|=\frac{M(1+|w|)}{2\sqrt{|w|}}$$

   si ha $|\psi(c)|>M$.
   Allora $\psi \in \Im$ è questo contraddice la definizione di M come sup delle norme

degli elementi di $\Im$. Quindi f è suriettiva.
Abbiamo provato che f:R$\rightarrow$D$_1$(0) è biettiva e olomorfa allora esiste f^{-1}:D$_1$(0)$\rightarrow$R anch essa olomorfa. Quindi f è il biolomorfismo cercato.

$\square$

Teniamo presente che nel corso della dimostrazione è stata fondamentale per due volte l'esistenza di una radice olomorfa.
Possiamo ora dimostrare il teorema generale di Cauchy aggiungendo altri quattro fatti equivalenti ai sei già noti.

Teorema 0.0.7. (Generale di Cauchy) Per una regione R sono equivalenti i seguenti fatti

1. R è omologicamente semplicemente connessa (per ogni γ cammino differenziabile a tratti in R si ha Int(γ)$\subseteq$R);
2. ogni funzione olomorfa in R è integrabile in R;
3. per ogni funzione f olomorfa in R e per ogni ciclo σ in R si ha che

$$\mathrm{I}(\sigma,\mathrm{z})\mathrm{f}(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \text{ per ogni } \mathrm{z}\in\mathrm{R}\text{-}|\sigma|;$$

4. per ogni ciclo σ in R si ha Int(σ)$\subseteq$R;
5. ogni funzione olomorfa in R e priva di zeri in R ha un logaritmo olomorfo in R;
6. ogni elemento invertibile in $\mathbb{O}$(R) (ovvero ogni funzione olomorfa priva di zeri in R) ammette una radice quadrata olomorfa in R;
7. R=$\mathbb{C}$ oppure R è biolomorfa a D$_1$(0);
8. R è omeomorfa a D$_1$(0);
9. R è semplicemente connessa;
10. il complementare R^C di R in $\mathbb{C}_\infty$ è connesso.

Dimostrazione: L'equivalenza di 1),...,6) è nota.
6)$\Rightarrow$7) E' una conseguenza del teorema della mappa.
7)$\Rightarrow$8) Se R=$\mathbb{C}$ allora R è omeomorfo a D$_1$(0). Se R è biolomorfo a D$_1$(0) allora in particolare R e D$_1$(0) sono omeomorfi.
8)$\Rightarrow$9) La semplice connessione è una proprietà topologica.
9)$\Rightarrow$10) Si è visto che l'omotopia implica l'omologia.

10)$\Rightarrow$1) Sia $R^C \subseteq \mathbb{C}_\infty$ connesso. Se $R^C=\{\infty\}$ allora $R=\mathbb{C}$. Supponiamo allora che sia $R\neq\mathbb{C}$, vogliamo provare che per ogni γ commino differenziabile a tratti in R si ha $Int(\gamma)\subseteq R$. Questo equivale a provare che se $z\in R^C$ allora $I(\gamma,z)=0$. Osserviamo che $\infty\in R^C$ e quindi R^C è una regione illimitata di $\mathbb{C}$. Ora $\mathbb{C}=Ext(\gamma)\cup|\gamma|\cup Int(\gamma)$ e $|\gamma|\cup Int(\gamma)$ è limitato, quindi $R^C\subseteq Ext(\gamma)$ e per ogni $z\in R^C$ si ha $z\in Ext(\gamma)$.
1)$\Rightarrow$10) Se R è omologicamente semplicemente connessa allora R è semplicemente connessa.
Supponiamo per assurdo che R^C non sia connesso, allora esistono due aperti disgiunti e non vuoti A, B tali che $R^C=A\cup B$. Poichè $\infty\in R^C$ possiamo supporre che $\infty\in B$ e quindi che A sia limitato. Consideriamo

$$d=\min\{d(z,w) \text{ con } z\in A \text{ e } w\in B\}$$

allora $d>0$. Suddividiamo ora $\mathbb{C}$ attraverso due famiglie di rette parallele all'asse reale e all'asse immaginario distanti $\frac{d}{\sqrt{2}}$ l'una dall'altra. In questo modo $\mathbb{C}$ risulta suddiviso in quadrati di lato $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Poichè A è limitato solo un numero finito di questi quadrati $Q_1,...,Q_n$ intersecano A. Dopo aver orientato i bordi di tali quadrati in senso antiorario consideriamo il ciclo $\sum_{i=1}^n \delta Q_i$. Osserviamo che i lati comuni a due quadrati vengono percorsi due volte in senso opposto pertanto non portano nessun contributo. Possiamo allora considerare $\sum_{i=1}^n \delta Q_i$ come un cammino differenziabile a tratti.
Notiamo inoltre che $|\sum_n^{i=1} \delta Q_i|$ non è contenuto nè in A nè in B perciò $\sum_{i=1}^n \delta Q_i \subseteq R$. Poniamo $\sum_{i=1}^n \delta Q_i$ e sia $a\in A$, allora $I(\gamma,a)=1$ ma $a\in R$ contraddice il fatto che $Int(\gamma)\subseteq R$, un assurdo. $\square$

Alcune considerazioni finali: Nelle argomentazioni riportate non è mai intervenuta nessuna ipotesi sul bordo della regione R, infatti anche se R ha un bordo estremamente regolare vale teorema della mappa.
Prima della postulazione di Riemann del suo teorema provare l'esistenza di una funzione significava esibire in forma analitica o esplicita una funzione con le proprietà richieste. Nel teorema della mappa si dimostra l'esistenza del biolomorfismo senza darlo in modo esplicito. Questo per l'epoca era un elemento di novità nel pensiero matematico.
Esistono poi generalizzazioni del teorema della mappa nel caso in cui R non sia connessa, il primo ad occuparsi di questi problemi fu H$\ddot{u}$rwitz.
Infine il teorema della mappa permette di trasportare problemi di natura locale sulle superfici di Riemann sul disco unitario.

Bibliografia

[1] Alhfors, *Complex Analysis*, 1966.

[2] R.Remmert, *Classical topics in Function Theory*, 1999.

[3] J.Gray, *On the history of the Riemann mapping Theorem*, 1994.

A.M. - Giugno 2008