SUR LES GROUPES DES AUTOMORPHISMES DES ESPACES DE MODULES DES COURBES

ALEX MASSARENTI

Résumé. Le champ algébrique $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, paramétrant les courbes de genre g avec n points marqués stables selon Deligne et Mumford, et son espace de modules $\overline{M}_{g,n}$ sont depuis des décennies parmi les objets les plus étudiés en géométrie algébrique.
B. Hassett a introduit de nouvelles compactifications de $M_{g,n}$ en donnant des nombres rationnels $(a_1,...,a_n), 0 < a_i \leqslant 1$, aux points marqués. Nous étudions les fibrations et les automorphismes de ces espaces de modules de Hassett. Comme cas particuliers nous obtiendrons des résultats déjà connus sur les groupes des automorphismes de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ et $\overline{M}_{g,n}$.

Ces notes ont été écrites pour un séminaire que j'ai donné à l'Institut de Mathématiques de Jussieu à Paris le 18 avril 2013.
Elles représentent un résumé des principaux résultats sur les automorphismes des espaces de modules des courbes obtenus dans les papiers [BM], [Ma] *et* [MM]. *Si ces notes sont suffisantes pour avoir une idée sur ce sujet, pour une meilleure compréhension des résultats et des techniques je renvoie aux articles mentionnés ci-dessus.*

Introduction

Le champ algébrique $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, paramétrant les courbes de genre g avec n points marqués stables selon Deligne and Mumford, et son espace de modules $\overline{M}_{g,n}$ sont depuis des décennies parmi les objets les plus étudiés en géométrie algébrique.
Les automorphismes de ces objets ont été étudiés dans une série de papiers, par exemple [BM], [Ma], [MM] and [Ro].
B. Hassett, dans [Ha], a introduit de nouvelles compactifications $\overline{M}_{g,A[n]}$ de $M_{g,n}$ en donnant des nombres rationnels $(a_1,...,a_n), 0 < a_i \leqslant 1$, aux points marqués.
Nous définissons une sous-classe de permutations, appelées *permutations admissibles*, qui génèrent un sous-groupe $A_n \subseteq S_n$ et induisent des automorphismes de $\overline{\mathcal{M}}_{g,A[n]}$ et $\overline{M}_{g,A[n]}$.
Les résultats présentés dans ces notes peuvent être résumés avec le théorème suivant.

Théorème. *Soit $\overline{\mathcal{M}}_{g,A[n]}$ le champ algébrique de Hassett paramétrant les courbes de genre g avec n points marqués stables, et soit $\overline{M}_{g,A[n]}$ son espace de modules. Si $2g-2+n \geqslant 3$ alors*

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{g,A[n]}) \cong \mathrm{Aut}(\overline{M}_{g,A[n]}) \cong A_n.$$

En outre :
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{1,A[2]}) \cong (\mathbb{C}^*)^2$ *alors que* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{1,A[2]})$ *est trivial,*
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,4}) \cong \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{0,4}) \cong \mathrm{Aut}(\overline{M}_{1,1}) \cong PGL(2)$ *alors que* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{1,A[1]}) \cong \mathbb{C}^*$.

Date: 26 avril 2013.

Comme cas particulier du théorème précédent, nous trouvons des résultats déjà connus sur les automorphismes de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ et $\overline{M}_{g,n}$.

Théorème. [BM, Theorem 4.3], [Ma, Theorem 3.9] *Soit $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ le champ algébrique paramétrant les courbes de genre g avec n points marqués stables selon Deligne et Mumford, et soit $\overline{M}_{g,n}$ son espace de modules. Si $2g-2+n\geqslant 3$ alors*

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\cong \mathrm{Aut}(\overline{M}_{g,n})\cong S_n.$$

Si $2g-2+n<3$ nous avons :
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{1,2})\cong(\mathbb{C}^*)^2$ *alors que* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{1,2})$ *est trivial,*
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,4})\cong \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{0,4})\cong \mathrm{Aut}(\overline{M}_{1,1})\cong PGL(2)$ *alors que* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{1,1})\cong\mathbb{C}^*$,
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_g)$ *et* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_g)$ *sont triviaux pour $g\geqslant 2$.*

1. Espaces de modules de Hassett et réalization de Kapranov de $\overline{M}_{0,n}$

Soit $g\geqslant 0$ un entier et $A=(a_1,...,a_n)\subset\mathbb{Q}^n$ des nombres rationnels tels que $0<a_i\leqslant 1$ et

$$2g-2+\sum_{i=1}^{n}>0.$$

Une famille de courbes nodales avec n points marqués $\pi:(C,s_1,...,s_n)\rightarrow S$ est stable de type (g,A) si :
- les sections $s_1,...,s_n$ se trouvent dans le lieu lisse de π, et pour chaque sous-ensemble $\{s_{i_1},...,s_{i_r}\}$ avec intersection non vide nous avons $a_{i_1}+...+a_{i_r}\leqslant 1$,
- $K_\pi+\sum_{i=1}^{n}a_is_i$ est ample par rapport à π.

B. Hassett, dans [Ha, Theorem 2.1], a montré que, étant donnée une paire (g,A), il existe un champ algébrique connexe de Deligne-Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{g,A[n]}$ lisse de dimension $3g-3+n$ représentant le problème des modules des courbes stables de type (g,A). L'espace de modules $\overline{M}_{g,A[n]}$ correspondant est projectif sur $\mathbb{Z}$.

Observation 1.1. Pour $A=(1,...,1)$, on obtient la compactification classique de Deligne-Mumford $\overline{M}_{g,n}$ de $M_{g,n}$.

Dans [Ka] *M. Kapranov* a construit $\overline{M}_{0,n}$ comme une séquence d'éclatements $f:\overline{M}_{0,n}\rightarrow\mathbb{P}^{n-3}$ centrés sur des espaces linéaires.

Construction 1.2. Plus précisément, étant donnés $n-1$ points $p_1,...,p_{n-1}\in\mathbb{P}^{n-3}$ en position linéaire générale :

(1) On éclate les points $p_1,...,p_{n-2}$, puis les droites $\langle p_i,p_j\rangle$,..., jusqu'aux espaces linéaires de dimension $n-5$ générés par $n-4$ de ces points.
(2) On éclate le point p_{n-1}, puis les droites générées par p_{n-1} and p_i avec $i\neq n-2$,..., jusqu'aux espaces linéaires de dimension $n-5$ générés par $n-4$ de ces points y compris p_{n-1} mais pas p_{n-2}.
$\vdots$
(n-3) On éclate l'espace linéaire généré par $p_4,...,p_{n-1}$.

Soit $W_{r,s}[n]$ la variété obtenue dans l'étape r une fois que nous avons terminé les éclatements des espaces linéaires générés par sous-ensembles S avec $|S|\leqslant s+r-2$. En particulier $W_{1,1}\cong\mathbb{P}^{n-3}$ et $W_{n-3}[n]\cong\overline{M}_{0,n}$.

Dans [Ha, Section 6.1] Hassett a interprété la variété $W_{r,s}[n]$ comme un espace de modules des courbes pondérées avec des poids

$$A_{r,s}[n] := (\underbrace{1/(n-r-1), ..., 1/(n-r-1)}_{(n-r-1) \text{ fois}}, s/(n-r-1), \underbrace{1, ..., 1}_{r \text{ fois}}).$$

Observation 1.3. L'espace $\overline{M}_{0,A_{1,n-3}[n]}$, c'est-à-dire l'éclatement de $\mathbb{P}^{n-3}$ dans tous les espaces linéaires de codimension au moins deux générés par sous-ensembles de $\{p_1, ..., p_{n-2}\}$, est intéressant en soi. Il s'agit de l'espace de modules de Losev-Manin $\overline{L}_{n-2}$ introduit par *A. Losev* et *Y. Manin* dans [LM]. Cet espace paramétrise des chaînes de droites projectives avec $n-2$ points marqués $x_1, ..., x_{n-2}$ et deux points marqués fixes x_0, x_∞.
Par exemple $\overline{L}_1$ est un point, $\overline{L}_2 \cong \mathbb{P}^1$ et $\overline{L}_3$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ dans trois points en position linéaire générale, c'est-à-dire une surface de Del Pezzo de degré six.

2. Fibrations

Pour les espaces de Hassett, comme pour $\overline{M}_{g,n}$, nous avons des morphismes qui oublient certains points marqués

$$\pi_{i_1,...,i_{n-r}} : \overline{M}_{0,A} \to \overline{M}_{0,B}.$$

Jusqu'à présent, pour étudier le problème des automorphismes des espaces de modules des courbes il a été nécessaire d'avoir une technologie pour contrôler les fibrations de ces espaces, voir par example [BM] and [Ma]. Voici deux résultats qui seront essentiels pour calculer les groupes des automorphismes des espaces de Hassett.

Théorème 1. [MM, Théorème 2.7] *Soit $f : \overline{M}_{0,A} \to \overline{M}_{0,B}$ un morphisme dominant avec des fibres connexes. Alors f se factorise comme un morphisme oubliant et une permutation des points marqués sur $\overline{M}_{0,B}$.*

En outre, comme conséquence immédiate de [GKM, Théorème 0.9] nous avons le théorème suivant.

Théorème 2. [MM, Théorème 2.8] *Soit $f : \overline{M}_{g,A} \to X$, avec $g \geqslant 1$, un morphisme dominant avec des fibres connexes sur une variété projective X.*
- *Si $g \geqslant 2$, soit f est une fibration et se factorise avec un morphisme oubliant, soit f est birationnel et $Exc(f) \subseteq \partial\overline{M}_{g,A}$.*
- *Si $g \geqslant 1$ et $f = \pi \circ \varphi$ oú π est un morphisme qui oublie un seul point et φ est un automorphisme de $\overline{M}_{1,A}$, alors f se factorise avec un morphisme oubliant.*

3. Automorphismes

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats précédents sur les fibrations pour calculer les groupes des automorphismes des espaces de Hassett.

Le cas le plus simple $n=5$. Nous commençons en examinant la Construction 1.2 dans le cas $n=5$.

(r=1,s=1) L'espace a poids $(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1)$, donc il est isomorphe à $\mathbb{P}^2$.
(r=1,s=2) On éclate les points p_1, p_2, p_3 et l'on obtient l'espace $\overline{M}_{0,A}$ avec

$$A = (1/3, 1/3, 1/3, 2/3, 1).$$

(r=2,s=1) On éclate le point p_4 et l'on retrouve $\overline{M}_{0,5}$.

Pour $\overline{M}_{0,A}$ nous avons trois morphismes oubliants correspondants aux points p_1, p_2, p_3 que nous avons éclatés. Etant donné un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A})$, pour le Théorème 1 la composition $\pi_i \circ \varphi$ factorise avec un autre morphisme oubliant π_{j_i} et nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,A} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{M}_{0,A} \\ {\scriptstyle \pi_{i_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ \overline{M}_{0,B} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{M}_{0,B} \end{array}$$

avec $\overline{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,B})$. Donc l'on peut associer à l'automorphisme φ la permutation $\{i \mapsto j_i\}$ et obtenir un morphisme surjectif de groupes

$$\chi : \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A}) \to S_3.$$

Maintenant, nous considérons un automorphisme $\varphi \in \ker(\chi)$. Alors φ induit une transformation birationnelle $\varphi_{\mathcal{H}} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ associée à un système linéaire $|\mathcal{H}| \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$. Puisque l'application $\varphi_{\mathcal{H}}$ doit stabiliser les droites L_i passantes pour les points p_i nous avons

$$\deg(\varphi_{\mathcal{H}})(L_i) = d - \mathrm{mult}_{p_i} \mathcal{H} = 1,$$

donc $\mathrm{mult}_{p_i} \mathcal{H} = d - 1$. En outre, $\mathcal{H}$ n'a pas de composantes fixes, alors $2(d-1) \leqslant d$ et $d \leqslant 2$.

- Si $d = 1$ alors $\varphi_{\mathcal{H}}$ est un automorphisme de $\mathbb{P}^2$ avec trois points fixes. Ceux-ci correspondent au groupe $(\mathbb{C}^*)^2$ des matrices diagonales non-singulières.
- Si $d = 2$ alors $|\mathcal{H}|$ est le système linéaire des coniques passantes par trois points et $\varphi_{\mathcal{H}}$ est la transformation classique de Cremona de $\mathbb{P}^2$.

Donc $\ker(\chi) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_2$ et

$$\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A}) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_3 \times S_2.$$

Observation 3.1. Notez que nous pouvons échanger les points $4, 5$ et permuter les points $1, 2, 3$. La transposition $4 \leftrightarrow 5$ correspond à la transformation de Cremona.

Observation 3.2. Puisque $\overline{M}_{0,A}$ est une surface de Del Pezzo de degré six $\mathcal{S}_6$ nous retrouvons un résultat classique sur son groupe des automorphismes :

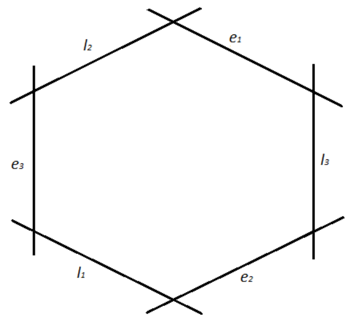
$$\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_6) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_3 \times S_2.$$

Voir [DI, Section 6] pour une démonstration qui n'utilise pas la théorie des modules des courbes.

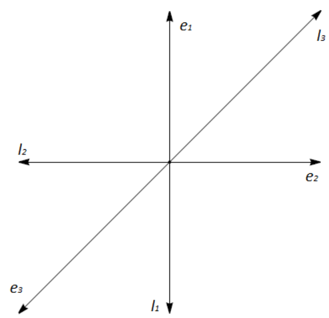
Comme nous avons remarqué dans l'Observation 1.3 l'espace $\overline{M}_{0,A}$ a deux autres incarnations.

- Il s'agit de l'espace de Losev-Manin $\overline{L}_3$ qui paramétrise des chaînes de droites projectives avec trois points marqués x_1, x_2, x_3 et deux points marqués fixes x_0, x_∞. De ce point de vue S_3 agit sur $\{x_1, x_2, x_3\}$ alors que S_2 agit sur $\{x_0, x_\infty\}$.
- Il s'agit d'une surface de Del Pezzo de degré six. En particulier, c'est une surface torique et le sous-groupe $(\mathbb{C}^*)^2 \subset \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A})$ correspond aux automorphismes toriques. Les diviseurs exceptionnels e_1, e_2, e_3 et les transformés l_1, l_2, l_3 des droites $\langle p_i, p_j \rangle$ sont

disposés dans un hexagone



à l'intérieur de $\overline{M}_{0,A}$. En outre, l'éventail de $\overline{M}_{0,A}$ est le suivant



De ce point de vue, l'action de S_3 correspond à des permutations de $\{e_1, e_2, e_3\}$ et de $\{l_1, l_2, l_3\}$ alors que S_2 induit l'échange des rôles des diviseurs exceptionnels entre les ensembles $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{l_1, l_2, l_3\}$.

Le cas général. Nous commençons avec un lemme qui sera utilisé pour contrôler le degré de certains systèmes linéaires sur $\mathbb{P}^{n-3}$.

Lemme 3.3. [MM, Lemme 3.5] *Soit $|\mathcal{H}| \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-3}}(d)|$ un système linéaire et $\{p_1, ..., p_{n-2}\}$ un ensemble de points en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^{n-3}$. Si $|\mathcal{H}|$ n'a pas de composantes fixes,* $\mathrm{mult}_{p_i} \mathcal{H} = d-1$ *et l'application rationnelle $\varphi_{\mathcal{H}}$ associé à $\mathcal{H}$ induit un automorphisme de $\overline{M}_{0,A_{1,s}[n]}$ qui préserve les morphismes oubliants sur $\overline{M}_{0,A_{1,s}[n-1]}$. Alors $s = d = n-3$ et $\varphi_{\mathcal{H}}$ est la transformation classique de Cremona de $\mathbb{P}^{n-3}$.*

Maintenant, nous sommes prêts à calculer les groupes des automorphismes des espaces de Hassett dans la Construction 1.2.

Théorème 3. [MM, Théorème 3.6] *Les groupes des automorphismes des espaces de Hassett dans la Construction 1.2 sont donnés par :*

- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_{n-2}$, *si* $r = 1$ *et* $s < n-3$,
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_{n-2} \times S_2$, *si* $r = 1$ *et* $s = n-3$,
- $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \cong S_n$, *si* $r \geqslant 2$.

Démonstration. Si $r=1$ nous avons $n-2$ morphismes oublians et par le Théorème 1 nous pouvons construire un morphisme surjectif des groupes

$$\chi : \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \to S_{n-2}.$$

Considérons un automorphisme $\varphi \in \ker(\chi)$, alors φ préserve les morphismes oubliants sur $\overline{M}_{0,A_{1,s}[n-1]}$ et stabilise les droites L_i passantes pour les points p_i. Donc nous avons $\deg(\varphi_{\mathcal{H}})(L_i) = d - \mathrm{mult}_{p_i}\mathcal{H} = 1$, et $\mathrm{mult}_{p_i}\mathcal{H} = d-1$. Nous sommes dans les hypothèses du Lemme 3.3.

- Si $s < n-3$, par le Lemme 3.3, il n'y a pas d'automorphismes birationnels de $\mathbb{P}^{n-3}$ qui induisent des automorphismes de $\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}$. Donc $\ker(\chi)$ est le groupe $(\mathbb{C}^*)^{n-3}$ des automorphismes de $\mathbb{P}^{n-3}$ qui fixent $n-2$ points en position linéaire générale, et
$$\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_{n-2}.$$
- Si $s = n-3$, par le Lemme 3.3, la la transformation classique de Cremona induit un automorphisme de $\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}$. Donc $\ker(\chi) \cong (\mathbb{C}^*)^{n-3} \times S_2$ et
$$\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times S_{n-2} \times S_2.$$

Quand $r \geqslant 2$ le dernier point p_{n-1} a été éclaté. Donc nous avons n morphismes oubliants et un morphisme surjectif des groupes

$$\chi : \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \to S_n.$$

Chaque automorphisme $\varphi \in \ker(\chi)$ stabilise les droites L_i passantes pour les points p_i et les courbes rationnelles normales C passantes pour $p_1, ..., p_{n-1}$. Les équations

$$\begin{aligned} &\deg(\varphi_{\mathcal{H}}(L_i)) = d - \mathrm{mult}_{p_i}\mathcal{H} = 1, \\ &\deg(\varphi_{\mathcal{H}}(C)) = (n-3)d - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{mult}_{p_i}\mathcal{H} = n-3 \end{aligned}$$

donnent $d=1$. Donc φ est l'identité, χ est injective et $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A_{r,s}[n]}) \cong S_n$. □

À la fin de la Construction 1.2, l'on obtient l'espace $\overline{M}_{0,n}$. Donc, par le Théorème 3, l'on a un résultat démontré par *A. Bruno* and *M. Mella*.

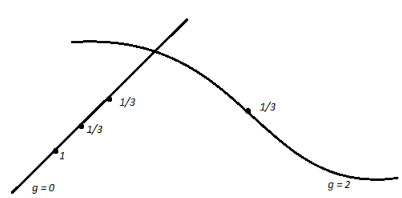
Théorème 4. [BM, Théorème 4.3] *Si* $n \geqslant 5$, *alors* $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,n}) \cong S_n$.

Le cas $g \geqslant 1$. Comme d'habitude, par le Théorème 2, nous avons un morphisme de groupes

$$\chi : \mathrm{Aut}(\overline{M}_{g,A[n]}) \to S_n.$$

Pour $\overline{M}_{g,n}$ ce morphisme est clairement surjectif. Toutefois, dans le cas plus général des espaces de Hassett l'image de χ dépend des poids. Nous nous demandons quelles sont les permutations qui induisent des automorphismes de $\overline{M}_{g,A[n]}$.

Exemple 3.4. Considérons $\overline{M}_{2,A[4]}$ avec $A = (1, 1/3, 1/3, 1/3)$ et le diviseur paramétrant les courbes réductibles $C_1 \cup C_2$ avec une composante C_1 de genre zéro avec des points marqués x_1, x_2, x_3 et une composante C_2 de genre deux avec le point marqué x_4.



La transposition $1 \leftrightarrow 4$ contracte la composante C_1. Donc, cette transposition induit une application birationnelle

$$\overline{M}_{2,A[4]} \overset{1\leftrightarrow 4}{\dashrightarrow} \overline{M}_{2,A[4]}$$

qui contracte un diviseur sur une sous-variété de codimension deux.

Notez que la contraction d'une queue rationnelle avec deux points marqués ne donne pas de problèmes, puisque une telle queue rationnelle n'a pas de modules. L'Exemple 3.4 suggère que les problèmes viennent des queues rationnelles avec au moins trois points marqués et nous conduit à la définition suivante.

Definition 3.5. Une transposition $i \leftrightarrow j$ de deux points marqués est *admissible* si et seulement si pour chaque $h_1, ..., h_r \in \{1, ..., n\}$, avec $r \geqslant 2$,

$$a_i + \sum_{k=1}^{r} a_{h_k} \leqslant 1 \iff a_j + \sum_{k=1}^{r} a_{h_k} \leqslant 1.$$

Soit $A_n \subseteq S_n$ le sous-groupe généré par des transpositions admissibles. Alors, le morphisme

$$\chi : \mathrm{Aut}(\overline{M}_{g,A[n]}) \to A_n$$

est surjectif par [MM, Lemme 3.15]. Maintenant, notre objectif est de calculer $\ker(\chi)$. Cela a été fait dans [MM, Proposition 3.16, Théorème 3.17]. Les résultats peuvent être résumés dans le théorème suivant.

Théorème 5. *Si $g \geqslant 1$ et $2g - 2 + n \geqslant 3$ alors*

$$\mathrm{Aut}(\overline{M}_{g,A[n]}) \cong A_n.$$

En outre, l'on a $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{1,A[2]}) \cong (\mathbb{C}^*)^2$ et $\mathrm{Aut}(\overline{M}_{1,A[1]}) \cong PGL(2)$.

Enfin nous considérons le champs algébrique $\overline{\mathcal{M}}_{0,A[n]}$. Ce champ algébrique a un morphisme naturel sur son espace de modules $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{0,A[n]} \to \overline{M}_{0,A[n]}$. Puisque π est universel pour les morphismes de schémas, pour chaque $\varphi \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{0,A[n]})$ il existe un unique $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\overline{M}_{0,A[n]})$ tel que $\pi \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$. Donc, nous obtenons un morphisme des groupes

$$\tilde{\chi} : \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{g,A[n]}) \to \mathrm{Aut}(\overline{M}_{g,A[n]}).$$

En outre, $\overline{\mathcal{M}}_{0,A[n]}$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford normal et si $2g-2+n \geqslant 3$ son stabilisateur générique est trivial. Donc, par [MM, Proposition 3.19] nous avons que $\tilde{\chi}$ est injective. Nous résumons les résultats sur le champs algébrique dans le théorème suivant.

Théorème 6. [MM, Théorème 3.20] *Si $g \geqslant 1$ et $2g - 2 + n \geqslant 3$ alors*

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{g,A[n]}) \cong A_n.$$

En outre, $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{1,A[2]})$ *est trivial et* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{1,A[1]}) \cong \mathbb{C}^*$.

Remerciements. Je tiens à remercier *Valentina Pastorello* qui a patiemment corrigé mon français.

Références

[BM] A. Bruno, M. Mella, *The automorphisms group of* $\overline{M}_{0,n}$, arXiv:1006.0987v1 [math.AG], to appear on J. Eur. Math. Soc.

[DI] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 443-548, Progr. Math., 269, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[GKM] A. Gibney, S. Keel, I. Morrison, *Towards the ample cone of* $\overline{M}_{g,n}$, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 273-294.

[Ha] B. Hassett, *Moduli spaces of weighted pointed stable curves*, arXiv:0205009v1 [math.AG], Advances in Mathematics 173 (2003), Issue 2, 316-352.

[Ka] M. Kapranov, *Veronese curves and Grothendieck-Knudsen moduli spaces* $\overline{M}_{0,n}$, Jour. Alg. Geom. 2 (1993), 239-262.

[LM] A. Losev, Y. Manin, *New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*, Michigan Math. J. Volume 48, Issue 1 (2000), 443-472.

[Ma] A. Massarenti, *The Automorphisms group of* $\overline{M}_{g,n}$, arXiv:1110.1464v1 [math.AG].

[MM] A. Massarenti, M. Mella, *On the automorphisms of moduli spaces of curves*, preprint 2013.

[Ro] H.L. Royden, *Automorphisms and isometries of Teichmüller spaces*, Advances in the theory of Riemann surfaces Ed. by L. V. Ahlfors, L. Bers, H. M. Farkas, R. C. Gunning, I. Kra, H. E. Rauch, Annals of Math. Studies No.66 (1971), 369-383.

Alex Massarenti, SISSA, via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail address: alex.massarenti@sissa.it